

# BUỔI LIVE 08\_HM10 LUYỆN ĐỀ

## ĐỀ TỰ LUYỆN

Thời gian: 120 phút.

### Bài 1. (1,5 điểm)

Bạn An phỏng vấn một số bạn học sinh cùng trường về màu mực mỗi bạn yêu thích nhất. Mỗi bạn chỉ chọn một màu mực. Kết quả được cho ở bảng sau:

Màu mực	Xanh đen	Tím đậm	Đỏ	Đen
Tần số	5	20	15	10

- a) Lập bảng tần số tương đối biểu diễn mẫu số liệu điều tra của bạn An.  
 b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt tròn để biểu diễn mẫu số liệu điều tra của bạn An.

### Hướng dẫn

1) Tổng số học sinh là:  $5 + 20 + 15 + 10 = 50$  (học sinh)

Tần số tương đối của số học sinh thích màu mực xanh đen, tím đậm, đỏ và đen lần lượt là:

$$\frac{5}{50} \cdot 100\% = 10\%; \frac{20}{50} \cdot 100\% = 40\%; \frac{15}{50} \cdot 100\% = 30\%; \frac{10}{50} \cdot 100\% = 20\%.$$

Bảng tần số tương đối biểu diễn mẫu số liệu điều tra của bạn An.

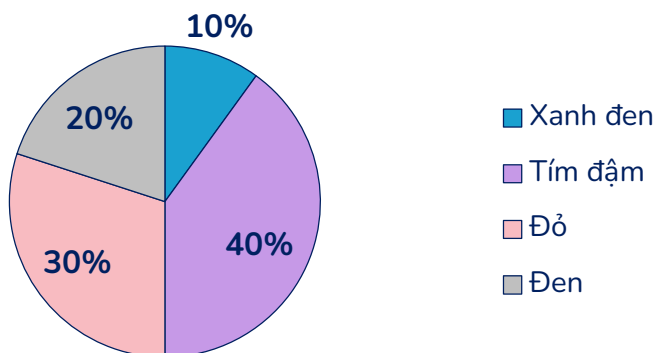
Màu mực	Xanh đen	Tím đậm	Đỏ	Đen
Tần số tương đối	10%	40%	30%	20%

- b) Số đo cung tròn tương ứng với các hình quạt tròn biểu diễn tần số tương đối của các giá trị lần lượt là:

$$360^\circ \cdot 10\% = 36^\circ, 360^\circ \cdot 40\% = 144^\circ, 360^\circ \cdot 30\% = 108^\circ, 360^\circ \cdot 20\% = 72^\circ.$$

Ta có biểu đồ quạt tròn biểu diễn mẫu số liệu điều tra của bạn An

### Màu mực yêu thích của các bạn học sinh



2) Một hộp chứa 5 tấm thẻ cùng loại được đánh số 1;5;6;8;9. Bạn Minh lấy ra đồng thời hai tấm thẻ từ trong hộp. Tính xác suất của biến cố  $D$ : “Tích hai số ghi trên hai tấm thẻ là số chẵn”.

**Hướng dẫn**

2) Không gian mẫu của phép thử là:

$$\Omega = \{(1,5);(1,6);(1,8);(1,9);(5,6);(5,8);(5,9);(6,8);(6,9);(8,9)\}$$

Như vậy  $n(\Omega) = 10$

Vì các tấm thẻ cùng loại nên các kết quả là đồng khả năng.

Các kết quả thuận lợi cho biến cố  $D$  là:  $D = \{(1,6);(1,8);(5,6);(5,8);(6,8);(6,9);(8,9)\}$

Như vậy  $n(D) = 7$

Xác suất của biến cố  $D$  là  $P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{7}{10}$ .

**Bài II. (1,5 điểm)**

Cho hai biểu thức  $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} + \frac{3-\sqrt{x}}{x-1}$  với  $x > 0, x \neq 1$ .

a) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 9$ ;

b) Chứng minh  $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ ;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = \frac{1}{2} \cdot A \cdot B$ .

**Hướng dẫn**

a) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 9$ ;

Thay  $x = 9$  (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức ta có:

$$A = \frac{9+3}{\sqrt{9}} = \frac{12}{3} = 4$$

Vậy  $A = 4$  khi  $x = 9$ .

b)  $B = \frac{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}{x-1} + \frac{3-\sqrt{x}}{x-1}$  với  $x > 0, x \neq 1$ .

$$B = \frac{2x - \sqrt{x} - 3 + 3 - \sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

c) Ta có  $P = \frac{1}{2} \cdot A \cdot B$  hay

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+3}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{x+3}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}-1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} - 2 \quad (1)$$

Với hai số thực không âm  $a, b$  ta có  $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$  hay  $a-2\sqrt{ab}+b \geq 0$ . Suy ra,  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$  (\*)

Dấu "=" xảy ra khi  $a=b$ .

Áp dụng bất đẳng thức (\*) ta được:

$$\sqrt{x}+1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} \geq 4$$

$$P = \sqrt{x}+1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} - 2 \geq 4 - 2 = 2. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } x=1 \text{ (loại)}$$

Do đó  $P > 2$

Vậy không tồn tại giá trị nhỏ nhất của  $P$ .

### Bài III. (2,5 điểm)

1) Một nhà máy sản xuất cà phê mỗi ngày được 60 tạ cà phê. Lượng cà phê tồn kho trước đó là 160 tạ. Sắp tới, một doanh nghiệp đối tác đặt hàng cho xuất khẩu 85 tấn cà phê. Hỏi nhà máy cần ít nhất bao nhiêu ngày để sản xuất được lượng cà phê cần thiết để giao cho doanh nghiệp đối tác? (tính cả lượng cà phê tồn kho).

#### Hướng dẫn

Đổi 60 tạ = 6 tấn.

Gọi số ngày ít nhất nhà máy sản xuất 85 tấn cà phê là  $x$  (ngày,  $x \in \mathbb{N}^*$ ).

Lượng cà phê nhà máy sản xuất được trong  $x$  ngày là  $6x$  (tấn).

Do nhà máy cần xuất 85 tấn cà phê (tính cả lượng tồn trong kho) nên ta có

$$6x+16 \geq 85, \text{ suy ra } x \geq 11,5.$$

Mà  $x \in \mathbb{N}^*$  nên  $x$  nhỏ nhất bằng 12.

Vậy nhà máy cần ít nhất 12 ngày để có thể xuất đi 85 tấn cà phê.

2) Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 90 km. Sau 1 giờ 30 phút, một ô tô cũng đi từ A đến B và đến B sớm hơn xe đạp 1 giờ. Tính tốc độ của mỗi xe, biết rằng tốc độ của ô tô gấp 3 lần tốc độ của xe đạp.

#### Hướng dẫn

Đổi 1 giờ 30 phút = 1,5 giờ.

Gọi vận tốc xe đạp là  $y(km/h)$

Vận tốc của ô tô là  $x(km/h)$

Điều kiện  $x > y > 0$

Do vận tốc của ô tô gấp 3 lần vận tốc của xe đạp nên ta có phương trình:  $x = 3y$  (1)

Thời gian xe ô tô đi từ A đến B là  $\frac{90}{x}$  (giờ)

Thời gian xe đạp đi từ A đến B là  $\frac{90}{y}$  (giờ)

Do ô tô xuất phát sau 1 giờ 30 phút mà vẫn đến B trước xe đạp 1 giờ nên ta có phương trình

$$\frac{90}{y} - \frac{90}{x} = 1,5 + 1 \text{ hay } \frac{90}{y} - \frac{90}{3y} = \frac{5}{2}$$

Thay  $x = 3y$ (1) vào phương trình (2) ta có:

$$\frac{90}{y} - \frac{90}{3y} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{90}{y} - \frac{30}{y} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 120 = 5.y$$

$y = 24$  (thỏa mãn điều kiện)

Thay  $y = 24$  vào phương trình (1) ta có:

$$x = 24.3 = 72 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy vận tốc xe đạp là  $24 km/h$ , vận tốc ô tô là  $72 km/h$ .

3) Cho phương trình  $x^2 + (m-1)x - 6 = 0$ . Tìm  $m$  là số nguyên để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1| + 2|x_2| = 8$ .

**Hướng dẫn**

Phương trình  $x^2 + (m-1)x - 6 = 0$  có  $a = 1, b = m-1, c = -6$  nên ta có:

$$\Delta = (m-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = (m-1)^2 + 24 > 0 \text{ với mọi } m \text{ (vì } (m-1)^2 \geq 0 \text{ với mọi } m)$$

Suy ra, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi  $m$ .

Khi đó, theo định lí Viète, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m & (1) \\ x_1 x_2 = -6 & (2) \end{cases}$$

Ta xét các trường hợp sau:

• Trường hợp 1.  $x_1 > x_2$ .

Kết hợp với (2) suy ra  $x_1 > 0$ ,  $x_2 < 0$ . Khi đó biểu thức  $|x_1| + 2|x_2| = 8$  trở thành:

$$x_1 - 2x_2 = 8 \quad (3)$$

Lấy (1) - (3) theo vế ta được:  $3x_2 = -m - 7$  hay  $x_2 = -\frac{m+7}{3}$ .

Từ (1) ta có:  $x_1 = 1 - m - x_2 = 1 - m + \frac{m+7}{3} = -\frac{2m-10}{3}$ .

Thay  $x_1$ ,  $x_2$  tìm được ở trên vào biểu thức (2), ta được:  $\frac{m+7}{3} \cdot \frac{2m-10}{3} = -6$ . Thu gọn và giải phương trình này ta được  $m = -4$ ;  $m = 2$  (thỏa mãn điều kiện  $m \in \mathbb{Z}$  và  $x_1 > x_2$ ).

• Trường hợp 2.  $x_1 < x_2$ .

Kết hợp với (2) suy ra  $x_1 < 0$ ,  $x_2 > 0$ . Khi đó biểu thức  $|x_1| + 2|x_2| = 8$  trở thành:

$$-x_1 + 2x_2 = 8 \quad (4)$$

Lấy (1) + (4) theo vế ta được:  $3x_2 = 9 - m$  hay  $x_2 = \frac{m-9}{3}$ .

Từ (1) ta có:  $x_1 = 1 - m - x_2 = 1 - m + \frac{m-9}{3} = -\frac{2m+6}{3}$ .

Thay  $x_1$ ,  $x_2$  tìm được ở trên vào biểu thức (2), ta được:  $\frac{m-9}{3} \cdot \frac{2m+6}{3} = -6$ . Thu gọn và giải phương trình này ta được  $m = 0$ ;  $m = 6$  (thỏa mãn điều kiện  $m \in \mathbb{Z}$  và  $x_1 < x_2$ ).

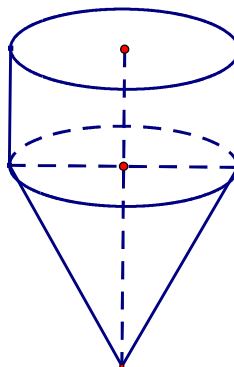
Vậy có 4 giá trị của  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán là  $m = -4$ ;  $m = 2$ ;  $m = 0$ ;  $m = 6$ .

#### Bài IV. (4 điểm)

1) Một khối gỗ gồm một phần có dạng hình trụ, phần còn lại có dạng hình nón có cùng bán kính, có đường kính đáy là  $14 \text{ dm}$ , chiều cao của phần hình trụ là  $7 \text{ dm}$ , chiều cao của phần hình nón là  $9 \text{ dm}$ .

a) Tính thể tích hình nón.

b) Tính thể tích của khối gỗ trên. (Lấy  $\pi \approx 3,14$  và làm tròn đến hàng đơn vị).



**Hướng dẫn**

a) Bán kính đáy khối gỗ là:  $R = 14 : 2 = 7(dm)$ .

Thể tích hình nón là:  $V_n = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 7^2 \cdot 9 = 147\pi (dm^3)$

b) Thể tích phần hình trụ là:  $V_t = \pi R^2 h = \pi \cdot 7^2 \cdot 7 = 343\pi (dm^3)$

Thể tích khối gỗ là  $V = 147\pi + 343\pi = 490\pi (dm^3) \approx 1539 (dm^3)$

Vậy thể tích khối gỗ khoảng  $1539dm^3$ .

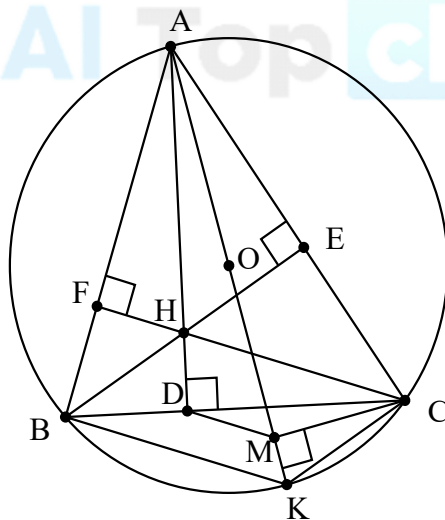
2) Cho tam giác  $ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$  có ba đường cao  $AD, BE, CF$  cắt nhau tại  $H$ .

a) Chứng minh tứ giác  $AEHF$  nội tiếp.

b) Kẻ đường kính  $AK$  của  $(O)$ , gọi  $M$  là hình chiếu vuông góc của  $C$  trên  $AK$ . Chứng minh:  $AB.AC = AD.AK$  và  $DM // BK$ .

c) Giả sử  $BC$  là dây cố định của  $(O)$ , còn  $A$  di động trên cung lớn  $BC$ . Tìm vị trí của điểm  $A$  để diện tích tam giác  $\Delta AHE$  lớn nhất.

**Hướng dẫn**



a) Chứng minh tứ giác  $AEHF$  nội tiếp.

Vì tam giác  $ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$  có ba đường cao  $AD, BE, CF$  cắt nhau tại  $H$ .

Nên  $BE \perp AC; CF \perp AB; AD \perp BC$

Ta có:

$\Delta AEH$  vuông tại  $E$  nên  $\Delta AEH$  nội tiếp đường tròn đường kính  $AH$  hay 3 điểm  $A, E, H$  thuộc đường tròn đường kính  $AH$ .

$\Delta AFH$  vuông tại  $F$  nên  $\Delta AFH$  nội tiếp đường tròn đường kính  $AH$  hay 3 điểm  $A, F, H$  thuộc đường tròn đường kính  $AH$ .

Suy ra, 4 điểm  $A, H, E, F$  cùng thuộc đường tròn đường kính  $AH$  hay tứ giác  $AEHF$  nội tiếp (đpcm).

**b) Kẻ đường kính  $AK$  của  $(O)$ , gọi  $M$  là hình chiếu vuông góc của  $C$  trên  $AK$ . Chứng minh:  $AB.AC = AD.AK$  và  $DM // BK$ .**

Xét  $(O)$  có  $\widehat{ACK} = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Xét tam giác  $\Delta ABD$  và  $\Delta AKC$  có

$$\widehat{ABC} = \widehat{AKC} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } AC)$$

$$\widehat{ACK} = \widehat{ADB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta AKC \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{AB}{AK} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AB.AC = AD.AK \text{ (đpcm).}$$

Ta có các tam giác  $\Delta ADC; \Delta AMC$  vuông có chung cạnh huyền  $AC$ .

Suy ra  $\Delta ADC; \Delta AMC$  ngoại tiếp đường tròn đường kính  $AC$ .

Hay 4 điểm  $A, D, M, C$  cùng thuộc một đường tròn đường kính  $AC$ .

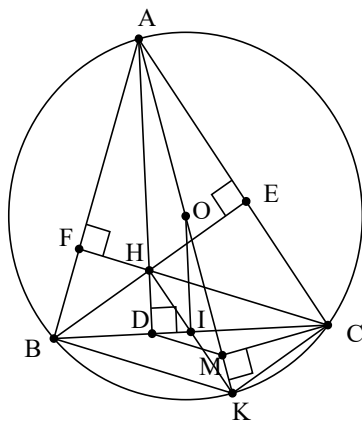
Chứng tỏ tứ giác  $ADMC$  nội tiếp đường tròn đường kính  $AC$ .

Suy ra  $\widehat{MDC} = \widehat{CAK}$  (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Xét  $(O)$  có  $\widehat{KBC} = \widehat{CAK}$  (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Suy ra  $\widehat{KBC} = \widehat{MDC}$  mà hai góc ở vị trí đồng vị nên  $BK // DM$  (đpcm).

**c) Giả sử  $BC$  là dây cố định của  $(O)$ , còn  $A$  di động trên cung lớn  $BC$ . Tìm vị trí của điểm  $A$  để diện tích tam giác  $\Delta AHE$  lớn nhất.**



Tứ giác  $BHCK$  có  $\begin{cases} BH // CK (\perp AC) \\ BK // CH (\perp AB) \end{cases}$  nên tứ giác  $BHCK$  là hình bình hành.

Gọi  $I$  là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành  $BHCK$ .

Suy ra  $I$  là trung điểm của  $HK$  và  $BC$ .

Xét  $\triangle AHK$  có:

$O$  là trung điểm của  $AK$  (đường kính)

$I$  là trung điểm của  $HK$

nên  $OI$  là đường trung bình của  $\triangle AHK$ .

Suy ra  $AH = 2OI$ , mà  $BC$  là dây cố định của  $(O)$  nên  $OI$  không đổi suy ra  $AH$  không đổi.

Xét  $\triangle AEH$  vuông tại  $E$  có  $S_{AEH} = \frac{1}{2} AE.EH$

Ta có:

$$(AE - HE)^2 \geq 0$$

$$AE^2 + HE^2 \geq 2AE.EH$$

$$AE.EH \leq \frac{AE^2 + HE^2}{2} = \frac{AH^2}{2} \text{ (Pythagore)}$$

$$\text{Suy ra: } S_{AEH} = \frac{1}{2} AE.EH \leq \frac{AH^2}{4}$$

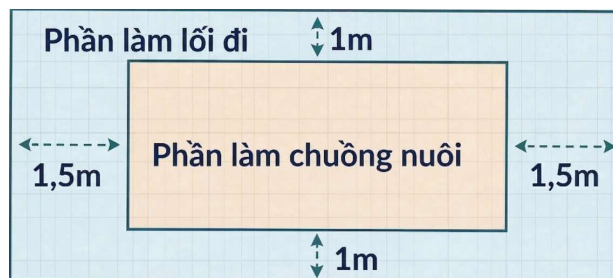
$S_{AEH}$  lớn nhất bằng  $\frac{AH^2}{4}$  khi  $AE = EH$  hay tam giác  $AEH$  vuông cân tại  $E$  suy ra  $\widehat{HAE} = 45^\circ$  suy

ra  $ADC$  vuông cân tại  $D$  suy ra  $\widehat{ACB} = 45^\circ$

Vậy điểm  $A$  thuộc cung  $BC$  lớn sao cho  $\widehat{ACB} = 45^\circ$  thì diện tích tam giác  $\triangle AHE$  lớn nhất.

**Bài V. (0,5 điểm)**

Bác Vinh dự định dành ra một thửa ruộng có dạng hình chữ nhật trong mảnh đất lớn của gia đình để làm khu chăn nuôi. Bác dự định để phần đất ở giữa dạng hình chữ nhật để làm chuồng nuôi, phần còn lại ốp gạch làm lối đi (như hình bên). Biết diện tích thửa ruộng bằng  $864m^2$ . Hỏi bác Vinh nên chọn các kích thước của thửa đất là bao nhiêu để diện tích phần chuồng nuôi là lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó?



Hướng dẫn

Gọi chiều dài và chiều rộng của thửa ruộng là  $x, y$  ( $x > 3, y > 2$ )

Vì diện tích thửa ruộng là  $864 m^2$  nên ta có  $xy = 864$ .

Diện tích chuồng:  $S = (x - 3)(y - 2) = xy - (2x + 3y) + 6 = 870 - (2x + 3y)$

Ta có  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$  (1) dấu = xảy ra khi  $a = b$

Áp dụng bất đẳng thức (1)

Ta có:  $2x + 3y \geq 2\sqrt{2x \cdot 3y} = 2\sqrt{6 \cdot 864} = 144$

Suy ra  $S \leq 870 - 144 = 726$

Dấu "=" xảy ra khi  $\begin{cases} 2x = 3y \\ xy = 864 \end{cases}$  hay  $\begin{cases} x = 36(tm) \\ y = 24(tm) \end{cases}$

Vậy bác Vinh nên chọn các kích thước của thửa ruộng là  $36m$  và  $24m$  để diện tích phần chuồng nuôi là lớn nhất bằng  $726m^2$ .

**CHÚC CÁC EM HỌC TẬP TỐT!**

**HOCMAI Top class**