

# BUỔI LIVE 10\_HM10 LUYỆN ĐỀ

## ĐỀ TỰ LUYỆN

Thời gian: 120 phút.

### Bài 1. (1,5 điểm)

1) Thống kê số lần truy cập Internet của 40 người trong một tuần là:

85	81	65	58	47	30	51	89	85	42
55	37	31	82	63	33	44	88	77	57
44	74	63	67	46	73	52	53	47	35
32	45	81	80	73	75	38	40	52	64

Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu đó sau khi được ghép nhóm theo sáu nhóm sau: [30;40), [40;50), [50;60), [60;70), [70;80), [80;90).

### Hướng dẫn

Bảng tần số ghép nhóm:

Nhóm	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)	[70;80)	[80;90)
Tần số	7	8	7	5	5	8

Tần số tương đối của các nhóm [30;40), [40;50), [50;60), [60;70), [70;80), [80;90) lần lượt là:

$$f_1 = \frac{7}{40} \cdot 100\% = 17,5\%, f_2 = \frac{8}{40} \cdot 100\% = 20\%, f_3 = \frac{7}{40} \cdot 100\% = 17,5\%,$$

$$f_4 = \frac{5}{40} \cdot 100\% = 12,5\%, f_5 = \frac{6}{40} \cdot 100\% = 15\%, f_6 = \frac{7}{40} \cdot 100\% = 17,5\%$$

Bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Nhóm	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)	[70;80)	[80;90)
Tần số	17,5%	20%	17,5%	12,5%	12,5%	20%

2) Nhóm học sinh tình nguyện khối 9 của một trường THCS có 6 bạn, trong đó có 3 bạn nam là: Trung (lớp 9A), Quý (lớp 9A), Việt (lớp 9C) và 3 bạn nữ là: An (lớp 9A), Châu (lớp 9B), Hương (lớp 9D). Chọn ngẫu nhiên một bạn trong nhóm đó để tham gia hoạt động tình nguyện của trường. Tính xác suất của biến cố A : “Bạn được chọn là bạn nữ lớp 9A”.

### Hướng dẫn

Các kết quả có thể xảy ra của phép thử là: Trung (lớp 9A), Quý (lớp 9A), Việt (lớp 9C), An (lớp 9A), Châu (lớp 9B), Hương (lớp 9D).

Có 6 kết quả có thể xảy ra.

Vì chọn ngẫu nhiên một bạn nên các kết quả là đồng khả năng.

Có 1 bạn nữ là: An (lớp 9A).

Suy ra có 1 kết quả thuận lợi cho biến cố  $A$ .

Vậy xác suất của biến cố  $A$  là  $\frac{1}{6}$ .

**Bài II. (1,5 điểm)**

Cho biểu thức :  $A = \frac{2\sqrt{x}+6}{x-1}$  và  $B = \frac{x+2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$  với  $x \geq 0, x \neq 1$

a) Tính giá trị của  $A$  khi  $x = 9$ .

b) Rút gọn biểu thức  $B$ .

c) Chứng minh  $\frac{A}{B} \leq 6$ .

**Hướng dẫn**

a) Thay  $x = 9$  (tmđkxđ) vào biểu thức  $A$  ta có:

$$A = \frac{2\sqrt{9}+6}{9-1} = \frac{3}{2}$$

Vậy khi  $x = 9$  thì  $A = \frac{3}{2}$ .

b) Với  $x \geq 0, x \neq 1$  ta có:

$$B = \frac{x+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

$$B = \frac{x+2 - \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}$$

$$B = \frac{x+2-x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

Vậy  $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ .

$$c) \text{ Ta có } \frac{A}{B} = \frac{2\sqrt{x}+6}{x-1} : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Xét hiệu } \frac{A}{B} - 6 = \frac{2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+1} - 6 = \frac{2\sqrt{x}+6-6\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}+1} = \frac{-4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

Vì  $\sqrt{x} \geq 0$  Suy ra  $\sqrt{x}+1 > 0$

$$\text{Suy ra } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \geq 0$$

$$\text{Suy ra } \frac{-4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \leq 0$$

$$\text{Suy ra } \frac{A}{B} - 6 \leq 0$$

$$\text{Vậy } \frac{A}{B} \leq 6.$$

### Bài III. (2,5 điểm)

1) Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là  $56m$ . Nếu tăng chiều rộng thêm  $4m$  và giảm bớt chiều dài  $4m$  thì diện tích tăng  $8m^2$ . Tính chiều dài và chiều rộng khu vườn.

#### Hướng dẫn

Nửa chu vi của hình chữ nhật là  $56 : 2 = 28(m)$

Gọi chiều rộng khu vườn là  $x$  ( $m$ ;  $0 < x \leq 14$ ).

Khi đó, chiều dài khu vườn là  $28 - x$  ( $m$ ).

Diện tích khu vườn là:  $x(28 - x)$  ( $m^2$ )

Chiều rộng sau khi tăng  $4m$  và chiều dài sau khi giảm  $4m$  lần lượt là  $x + 4$  ( $m$ ) và  $28 - x - 4 = 24 - x$  ( $m$ ).

Diện tích khu vườn là:  $(x + 4)(24 - x)$  ( $m^2$ )

Vì diện tích mới tăng  $8m^2$  so với diện tích ban đầu nên ta có phương trình:

$$(x + 4)(24 - x) - x(28 - x) = 8$$

$$-x^2 + 20x + 96 - 28x + x^2 = 8$$

$$-8x = 8 - 96$$

$$x = 11 (tm)$$

Vậy chiều rộng khu vườn là  $11m$ , chiều dài khu vườn là  $17m$ .

2) Một ca nô chạy xuôi dòng sông 108 km rồi chạy ngược dòng 63 km hết tất cả 7 giờ. Một lần khác, ca nô này chạy xuôi dòng 81 km rồi ngược dòng 84 km cũng hết 7 giờ. Hãy tính vận tốc thật của ca nô này và vận tốc của dòng nước (biết vận tốc thật của ca nô và vận tốc dòng nước ở hai lần là như nhau).

**Hướng dẫn**

Gọi vận tốc thật của ca nô là  $x$  km/h, vận tốc của dòng nước  $y$  km/h. ( $x > y > 0$ ).

Vận tốc xuôi dòng là  $x + y$  (km/h)

Vận tốc ngược dòng là  $x - y$  (km/h)

Vì ca nô chạy xuôi dòng sông 108 km rồi chạy ngược dòng 63 km hết tất cả 7 giờ ta có phương trình

$$\frac{108}{x+y} + \frac{63}{x-y} = 7 \text{ hay } \frac{432}{x+y} + \frac{252}{x-y} = 28 \quad (1)$$

Vì ca nô này chạy xuôi dòng 81 km rồi ngược dòng 84 km cũng hết 7 giờ ta có phương trình  $\frac{81}{x+y} + \frac{84}{x-y} = 7$

$$\text{hay } \frac{243}{x+y} + \frac{252}{x-y} = 21 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ

$$\begin{cases} \frac{432}{x+y} + \frac{252}{x-y} = 28 & (1) \\ \frac{243}{x+y} + \frac{252}{x-y} = 21 & (2) \end{cases}$$

Trừ vế với vế của (1) và (2) ta có  $\frac{189}{x+y} = 7$  hay  $x + y = 27$

Thay  $x + y = 27$  vào phương trình (2) ta có  $\frac{243}{27} + \frac{252}{x-y} = 21$  hay  $x - y = 21$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x + y = 27 \\ x - y = 21 \end{cases}$$

Cộng vế với vế ta có  $x = 24$  (TMĐK)

Thay  $x = 24$  vào  $x + y = 27$  ta có  $24 + y = 27$ . Do đó  $y = 3$  (TMĐK).

Vậy vận tốc thật của ca nô là 24 km/h, vận tốc của dòng nước 3 km/h.

3) Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 6 = 0$  ( $m$  là tham số). Gọi  $x_1; x_2$  là hai nghiệm nguyên của phương

trình. Tìm  $m$  nguyên dương để  $A = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$  có giá trị nguyên.

**Hướng dẫn**

Ta có  $\Delta' = (m-1)^2 - (2m-6) = m^2 - 4m + 7 = m^2 - 4m + 4 + 3 = (m-2)^2 + 3 > 0$  với mọi giá trị của  $m$ .

Theo định lí Viète ta có:  $x_1 + x_2 = 2(m-1); x_1 x_2 = 2m-6$ .

Ta có:  $x_1; x_2 \neq 0$  nên  $2m-6 \neq 0 \Rightarrow m \neq 3$ .

Vì  $x_1, x_2$  là các nghiệm nguyên nên  $\Delta'$  là số chính phương.

$$\text{Đặt } (m-2)^2 + 3 = k^2 (k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow k^2 - (m-2)^2 = 3$$

$$\Rightarrow (k-m+2)(k+m-2) = 3$$

Vì  $k \geq 0$  nên  $(k-m+2) + (k+m-2) = 2k \geq 0$ .

Hai thừa số có tổng không âm và tích bằng 3 (là số nguyên dương) nên cả hai thừa số đều phải là số nguyên dương.

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} k-m+2=1 \\ k+m-2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=2 \\ m=3 \end{cases} \text{ (loại vì } m \neq 3 \text{)}$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} k-m+2=3 \\ k+m-2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=2 \\ m=1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Kiểm tra lại:

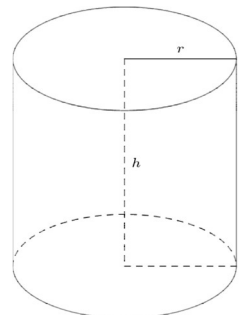
Với  $m=1$  phương trình trở thành  $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -2$ .

$$\text{Thay vào } A \text{ ta được: } A = \left(\frac{2}{-2}\right)^2 + \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = (-1)^2 + (-1)^2 = 2.$$

Vậy  $m=1$  là giá trị cần tìm.

#### Bài IV. (4 điểm)

1) Một doanh nghiệp sản xuất vỏ hộp sữa Ông Thọ dạng hình trụ (như hình minh họa bên dưới), có chiều cao bằng 12cm. Biết thể tích của hộp là  $192\pi \text{ cm}^3$ .



a) Tính bán kính đáy của hộp sữa.

b) Tính số tiền mà doanh nghiệp cần chi để sản xuất 10000 vỏ hộp sữa Ông Thọ (kể cả hai nắp hộp), biết chi phí để sản xuất vỏ hộp đó là 80000 đồng / $m^2$  (làm tròn kết quả đến hàng triệu).

**Hướng dẫn**

a) Vì hộp sữa hình trụ có chiều cao  $h = 12\text{cm}$  và thể tích  $V = 192\pi\text{cm}^3$  nên:

$$V = \pi r^2 h$$

$$192\pi = 12\pi r^2$$

$$r^2 = 16$$

$$\Rightarrow r = 4\text{cm}$$

Vậy bán kính đáy của hộp sữa bằng  $4\text{cm}$ .

b) Vì hộp sữa hình trụ có  $r = 4\text{cm}$  và chiều cao  $h = 12\text{cm}$  nên diện tích toàn phần của hộp sữa là:

$$S_{tp} = 2\pi r(h + r) = 2\pi \cdot 4(12 + 4) = 128\pi (\text{cm}^2).$$

Chi phí sản xuất 10 000 vỏ hộp sữa là:  $\frac{128\pi}{10000} \cdot 10000 \cdot 80000 \approx 32000000$  đồng.

Vậy chi phí sản xuất khoảng 32 triệu đồng.

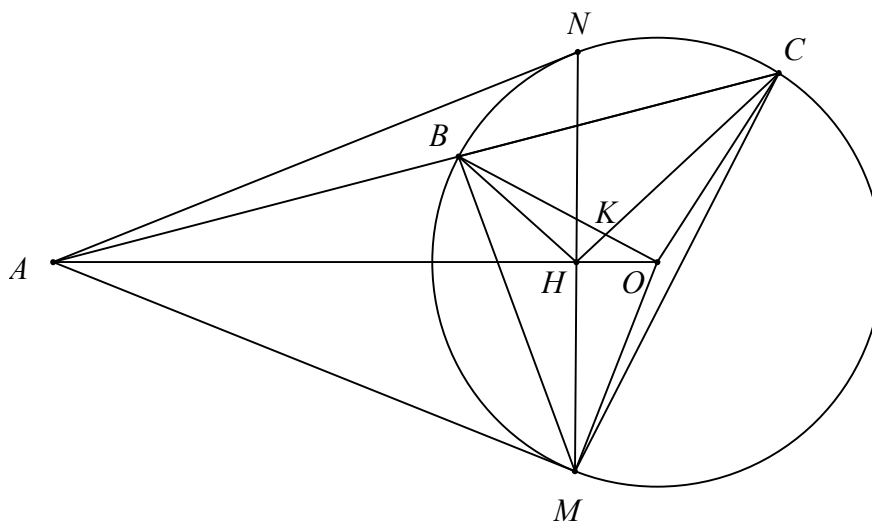
2) Cho đường tròn  $(O)$  và một điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn  $(O)$ . Từ  $A$  kẻ hai tiếp tuyến  $AM, AN$  tới đường  $(O)$  ( $M, N$  là các tiếp điểm).

a) Chứng minh tứ giác  $AMON$  nội tiếp

b) Đường thẳng qua  $A$  cắt  $(O)$  tại  $B, C$  (tia  $AO$  nằm giữa hai tia  $AM, AC$ ,  $AB < AC$ ). Chứng minh  $AM^2 = AB \cdot AC$

c) Gọi  $H$  là giao điểm của  $AO$  và  $MN$ . Chứng minh  $HN$  là tia phân giác của  $\widehat{BHC}$

**Hướng dẫn**



a) Chứng minh tứ giác  $AMON$  nội tiếp

Vì  $AM, AN$  là tiếp tuyến của  $(O)$  nên  $AM \perp OM, AN \perp ON$

Suy ra  $\triangle AMO$  vuông tại  $M$ , nên  $\triangle AMO$  nội tiếp đường tròn đường kính  $AO$   
Do đó, ba điểm  $A, M, O$  cùng thuộc đường tròn đường kính  $AO$ .

Suy ra  $\triangle ANO$  vuông tại  $N$ , nên  $\triangle ANO$  nội tiếp đường tròn đường kính  $AO$   
Do đó, ba điểm  $A, N, O$  cùng thuộc đường tròn đường kính  $AO$ .

Suy ra 4 điểm  $A, M, O, N$  cùng thuộc đường tròn đường kính  $AO$

Vậy tứ giác  $AMON$  nội tiếp đường tròn đường kính  $AO$

**b) Chứng minh  $AM^2 = AB.AC$**

Ta có  $AM \perp OM$  (cmt) nên  $\widehat{AMB} = 90^\circ - \widehat{BMO}$

Mà  $OB = OM = R$  nên  $\triangle BOM$  cân ở  $O$  suy ra  $\widehat{BMO} = \frac{180^\circ - \widehat{BOM}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{BOM}}{2}$

Suy ra  $\widehat{AMB} = 90^\circ - 90^\circ + \frac{\widehat{BMO}}{2} = \frac{\widehat{BMO}}{2}$  (1)

Xét  $(O)$  có:  $\widehat{MCB} = \frac{\widehat{BOM}}{2}$  (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn  $\widehat{BM}$ ) (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $\widehat{AMB} = \widehat{ACM}$

Xét  $\triangle AMB; \triangle ACM$  có:

$\widehat{MAB}$  : chung

$\widehat{AMB} = \widehat{ACM}$  (cmt)

Suy ra  $\triangle AMB \sim \triangle ACM$  (g.g)

Do đó  $\frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AM}$  hay  $AM^2 = AB.AC$

**c) Chứng minh  $HN$  là tia phân giác của  $\widehat{BHC}$**

Gọi  $K$  là giao điểm của  $BO$  và  $HC$

Vì  $AM, AN$  là 2 tiếp tuyến cắt nhau ở  $A$  nên  $AM = AN$  mà  $OM = ON = R$

Suy ra  $AO$  là đường trung trực của  $MN$

Do đó,  $AO \perp MN$  tại  $H$

Xét  $\triangle AMO; \triangle AHM$  có:

$\widehat{AMO} = \widehat{AHM} = 90^\circ$

$\widehat{MAO}$ : chung

Suy ra  $\triangle AMO \sim \triangle AHM$  (g.g)

Do đó  $\frac{AM}{AH} = \frac{AO}{AM}$  hay  $AM^2 = AH.AO$ .

Mà  $AM^2 = AB.AC$  (cmt) nên  $AH.AO = AB.AC$

Do đó,  $\triangle AHB \sim \triangle ACO$  (c.g.c) nên  $\widehat{AHB} = \widehat{ACO}$  (3)

Ta cũng có:  $\triangle AHC \sim \triangle ABO$  (c.g.c) nên  $\widehat{ACH} = \widehat{AOB}$  hay  $\widehat{BCO} = \widehat{OBC}$  hay  $\widehat{ACO} = \widehat{OBC}$ .

Mà  $\widehat{BKC} = \widehat{HKO}$  (2 góc đối đỉnh)

Suy ra  $\widehat{KBC} = \widehat{KHO}$  (4)

Mặt khác:  $OB = OC = R(GT)$  nên  $\Delta OBC$  cân ở  $O$  suy ra:  $\widehat{BCK} = \widehat{OBC}$  (5)

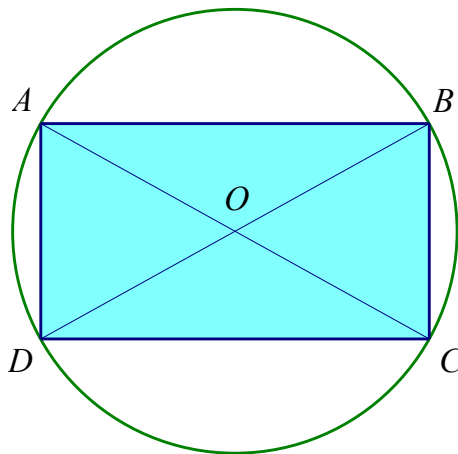
Từ (3), (4), (5) suy ra:  $\widehat{AHB} = \widehat{OHC}$  mà  $\widehat{AHB} + \widehat{BHN} = 90^\circ$ ;  $\widehat{OHC} + \widehat{CHN} = 90^\circ$

Suy ra:  $\widehat{BHN} = \widehat{CHN}$

Do đó,  $HN$  là tia phân giác của  $\widehat{BHC}$ .

**Bài V. (0,5 điểm)**

Người ta muốn dựng một mảnh vườn hình chữ nhật  $ABCD$  có diện tích  $961m^2$  trên một khu đất hình tròn (hình vẽ). Để diện tích khu đất là nhỏ nhất thì kích thước mảnh vườn bằng bao nhiêu ?



**Hướng dẫn**

Gọi chiều dài hình chữ nhật  $AB = CD = x (m; x > 0)$

Gọi chiều rộng hình chữ nhật  $AD = BC = y (m; y > 0)$

Diện tích hình chữ nhật  $S_{ABCD} = xy = 961 (m^2)$

Xét  $\Delta ABC$  vuông tại  $B$  có  $AC^2 = AB^2 + BC^2 = x^2 + y^2$  (định lí Pythagore)

Ta có diện tích khu đất hình tròn bằng

$$S = S_{(O)} = \pi \cdot \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{x^2 + y^2}{4} (m^2).$$

Với hai số thực  $a, b$  không âm ta có  $(a - b)^2 \geq 0$  hay  $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$  tức là  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  (\*)

Dấu “ = ” xảy ra khi  $a = b$

Áp dụng BĐT (\*) với hai số thực không âm  $x, y$  ta có  $x^2 + y^2 \geq 2xy = 2.961$

$$\text{Suy ra, } S = \pi \cdot \frac{x^2 + y^2}{4} \geq \pi \frac{2.961}{4} = 480,5\pi (m^2)$$

Dấu “ = ” xảy ra khi  $x = y$  mà  $x \cdot y = 961$  nên  $x = y = 31(m)$

Vậy diện tích nhỏ nhất của khu đất là  $480,5\pi (m^2)$  khi  $ABCD$  là hình vuông có cạnh  $31m$ .

**CHÚC CÁC EM HỌC TẬP TỐT!**