

BUỔI LIVE 16_ HM10 LUYỆN ĐỀ

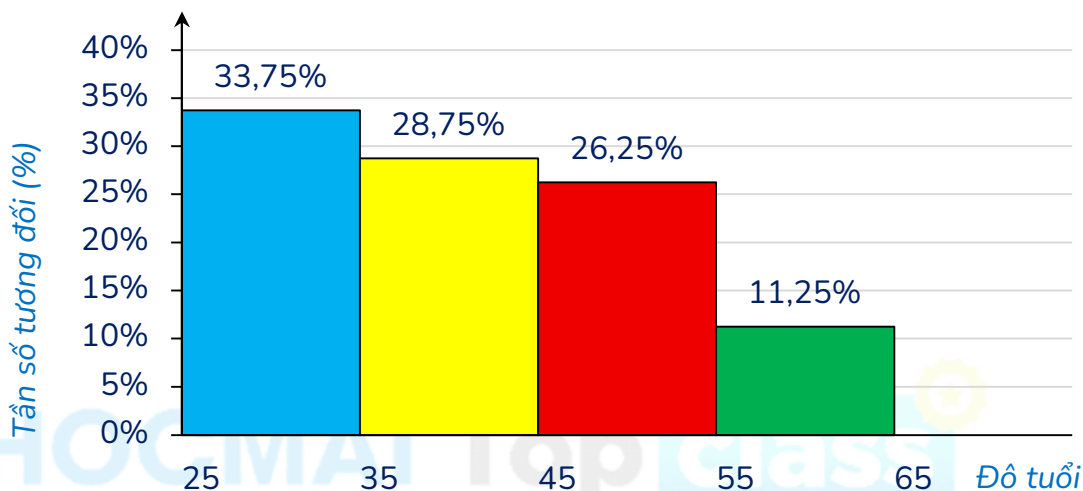
ĐỀ TỰ LUYỆN

Thời gian: 120 phút.

Bài I. (1,5 điểm)

1) Biểu đồ bên biểu diễn tỉ lệ đại biểu tham dự hội nghị theo độ tuổi. Biết rằng có 54 đại biểu từ 25 tuổi đến 35 tuổi.

Tỉ lệ đại biểu theo độ tuổi



a) Có bao nhiêu đại biểu tham dự hội nghị?

b) Một người cho rằng có trên 50% số đại biểu tham dự hội nghị dưới 45 tuổi. Nhận định đó đúng hay sai? Tại sao?

Hướng dẫn

a) Nhóm $[25;35)$ chiếm 33,75% so với tổng số đại biểu và có 54 người.

Tổng số đại biểu tham dự hội nghị là: $54 : 33,75\% = 160$ (người)

b) Tổng số phần trăm số đại biểu tham dự hội nghị dưới 45 tuổi là:

$$33,75\% + 28,75\% = 62,5\% > 50\%.$$

Vậy nhận định trên là đúng.

2) Trong túi đựng 48 viên bi cùng kích thước và khối lượng với hai màu đỏ và xanh. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ túi. Biết rằng xác suất lấy được viên bi màu đỏ bằng 92% xác suất lấy được viên bi màu xanh. Hỏi trong túi có bao nhiêu viên bi màu đỏ, bao nhiêu viên bi màu xanh?

Hướng dẫn

Gọi số viên bi màu đỏ có trong túi là x ($x \in \mathbb{N}^*; x < 48$)

Suy ra số viên bi màu xanh có trong túi là $48 - x$

Phép thử là lấy ngẫu nhiên một viên bi từ túi đựng 48 viên bi. Do các viên bi có cùng kích thước và khối lượng nên các kết quả có thể xảy ra là đồng khả năng.

Xét biến cố A : "Lấy được viên bi màu đỏ". Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là x .

Xác suất lấy được viên bi màu đỏ là $\frac{x}{48}$.

Xét biến cố B : "Lấy được viên bi màu xanh". Số kết quả thuận lợi cho biến cố B là $48 - x$.

Xác suất lấy được viên bi màu xanh là $\frac{48 - x}{48}$

Xác suất lấy được viên bi màu đỏ bằng 92% xác suất lấy được viên bi màu xanh nên ta có:

$$\frac{x}{48} = 92\% \cdot \frac{48 - x}{48} \text{ hay } x = 0,92(48 - x)$$

$$x = 0,92(48 - x)$$

$$x = 44,16 - 0,92x$$

$$1,92x = 44,16$$

$$x = 23 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy số viên bi màu đỏ có trong túi là 23 viên. Số viên bi màu xanh có trong túi là $48 - 23 = 25$ viên.

Bài II. (1,5 điểm)

Cho các biểu thức $A = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ và $B = \left(\frac{15 - \sqrt{x}}{x - 25} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5}$ với $x \geq 0; x \neq 25$

- Tính giá trị biểu thức A khi $x = 49$.
- Rút gọn B .
- Đặt $P = B - A$. Tìm x để P nhận giá trị nguyên.

Hướng dẫn

a) Thay $x = 49$ (*tmdk*) vào biểu thức A , ta được

$$A = \frac{1 - \sqrt{49}}{1 + \sqrt{49}} = \frac{1 - 7}{1 + 7} = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}$$

Vậy $A = \frac{-3}{4}$ khi $x = 49$.

$$b) B = \left(\frac{15 - \sqrt{x}}{x - 25} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{15 - \sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 5)} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5} \\
 &= \frac{15 - \sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 10}{(\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 5)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5} \\
 &= \frac{\sqrt{x} + 5}{(\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 5)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x} + 1}.
 \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0; x \neq 25$.

c) Ta có: $P = B - A = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$

Có $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0$. Do đó $\sqrt{x} + 1 \geq 1$. Suy ra $-\frac{1}{\sqrt{x} + 1} \geq -1$ hay $P \geq 0$ (1)

Vì $\sqrt{x} \geq 0$ nên $\sqrt{x} + 1 > 0$. Suy ra $-\frac{1}{\sqrt{x} + 1} < 0$ hay $P < 1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $0 \leq P < 1$, P nhận giá trị nguyên nên $P = 0$

Với $P = 0$ suy ra $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = 0$

$$\sqrt{x} = 0$$

$$x = 0 \text{ (tmdk)}$$

Vậy $x = 0$ thì $P = B - A$ có giá trị là số nguyên.

Bài III. (2,5 điểm)

1) Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn 1 tháng là 0,4%. Hỏi nếu muốn có số tiền lãi hàng tháng ít nhất là 3 triệu đồng thì số tiền gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)?

Hướng dẫn

Gọi số tiền gửi lãi tiết kiệm là x (triệu đồng) ($x > 0$)

Số tiền lãi mỗi tháng khi gửi x triệu đồng là $x \cdot \frac{0,4}{100} = 0,004x$ (triệu đồng)

Số tiền lãi hàng tháng ít nhất là 3 triệu đồng nên ta có:

$$0,004x \geq 3$$

$x \geq 750$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy cần gửi ít nhất 750 triệu đồng thì số tiền lãi hàng tháng ít nhất là 3 triệu đồng.

2) Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì 6 giờ đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất chảy một mình trong 3 giờ rồi khóa lại, mở vòi thứ hai chảy tiếp trong 4 giờ thì lượng nước trong bể chiếm 60% bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy riêng thì trong bao lâu đầy bể?

Hướng dẫn

Gọi thời gian vòi thứ nhất, vòi thứ hai chảy một mình đầy bể lần lượt là x, y ($x, y > 6$) (giờ)

Trong 1 giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bể

Trong 1 giờ vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ bể

Trong 1 giờ cả hai vòi chảy được $\frac{1}{6}$ bể

Ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ (1)

Trong 3 giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{3}{x}$ bể

Trong 4 giờ vòi thứ hai chảy được $\frac{4}{y}$ bể

Ta có phương trình $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{3}{5}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{y} = \frac{1}{10} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{10} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10 \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10 \\ x = 15 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy thời gian vùi thứ nhất, vùi thứ hai chày một mình đầy bể lần lượt là 15 giờ và 10 giờ

3) Cho phương trình $x^2 - 2(m-2)x - 6m = 0$ ẩn x và tham số m .

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn $M = 2x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Xét phương trình $x^2 - 2(m-2)x - 6m = 0$ (1)

$$\Delta' = (m-2)^2 + 6m$$

$$= m^2 + 2m + 4$$

$$= (m+1)^2 + 3 > 0 \text{ với mọi } m.$$

\Rightarrow phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

b) Theo a) phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_2 với mọi m

Theo hệ thức Viète ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-2) & (2) \\ x_1 \cdot x_2 = -6m & (3) \end{cases}$$

Ta có

$$M = 2x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2$$

$$M = 2x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2$$

$$M = 4x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2$$

$$M = 4 \cdot (-6m) - [2(m-2)]^2$$

$$M = -24m - 4(m^2 - 4m + 4)$$

$$M = -4(m^2 - 4m + 4 + 6m)$$

$$M = -4(m^2 + 2m + 1 + 3)$$

$$M = -4(m+1)^2 - 12$$

$$M = -4(m+1)^2 - 12 \leq -12 \text{ với } \forall m.$$

Dấu “=” xảy ra khi $m+1=0$ hay $m=-1$ (tm)

Vậy giá trị lớn nhất của $M = -12$ khi $m = -1$

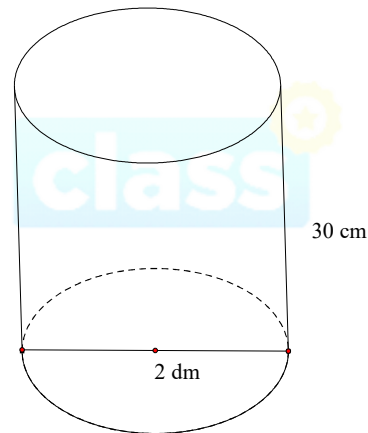
Bài IV. (4 điểm)

1) Một thùng lấy nước bằng tôn dạng hình trụ có chiều cao là 30cm và đường kính đáy là 2dm (như minh họa trong hình vẽ).

a) Tính thể tích của thùng nước đó.

b) Người ta sử dụng thùng trên để múc nước đổ vào một bể chứa có dung tích $0,5m^3$. Hỏi cần phải đổ ít nhất bao nhiêu thùng thì mới đầy bể chứa? Biết rằng mỗi lần múc nước, người ta chỉ lấy được 95% thùng để nước không bị đổ ra ngoài.

c) Tính chi phí mua tôn để làm 100 chiếc thùng đó biết giá mỗi mét vuông tôn là 96000 đồng (bỏ qua hao phí và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của VNĐ).



Hướng dẫn

a) Đổi $30\text{cm} = 3\text{dm}$

Thể tích của thùng nước đó là: $V = \pi \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^2 \cdot 3 = 3\pi (\text{dm}^3)$

b) Thể tích nước trong thùng mỗi lần múc là $95\% \cdot 3\pi = 2,85\pi (\text{dm}^3)$

Đổi $0,5m^3 = 500\text{dm}^3$

Khi đó số thùng nước ít nhất cần phải đổ để đầy bể là $500 : (2,85\pi) \approx 56$ (thùng).

Vậy số thùng nước ít nhất cần khoảng 56 thùng.

c) Đổi $30\text{cm} = 0,3\text{m}$; $2\text{dm} = 0,2\text{m}$

Diện tích xung quanh của thùng nước là $2\pi \frac{0,2}{2} \cdot 0,3 = 0,06\pi (\text{m}^2)$

Diện tích phần tôn làm thùng nước là $0,06\pi + \pi\left(\frac{0,2}{2}\right)^2 = 0,06\pi + 0,01\pi = 0,07\pi(\text{m}^2)$

Chi phí mua tôn để làm 100 chiếc thùng nước là:
 $0,07\pi \cdot 100 \cdot 96000 = 672000\pi \approx 2\,111\,150$ (đồng).

Vậy chi phí để mua tôn khoảng 2111150 đồng.

2) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại điểm S . Gọi I là chân đường vuông góc kẻ từ điểm O đến đường thẳng BC .

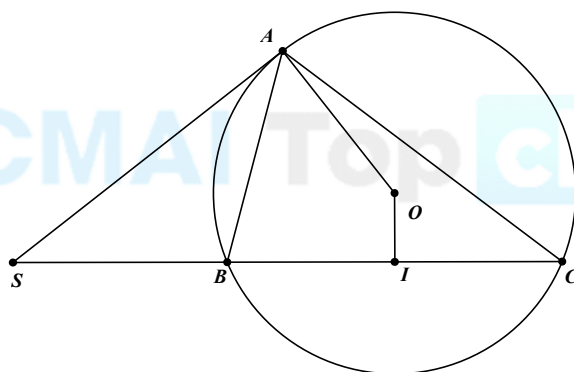
a) Chứng minh tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi H và D lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm A đến các đường thẳng SO và SC . Chứng minh $\widehat{OAH} = \widehat{IAD}$.

c) Vẽ đường cao CE của tam giác ABC . Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng BE . Đường thẳng QD cắt đường thẳng AH tại điểm K . Chứng minh $BQ \cdot BA = BD \cdot BI$.

Hướng dẫn

a) Chứng minh tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp.



Vì SA là tiếp tuyến của (O) tại A nên $OA \perp SA \Rightarrow \widehat{SAO} = 90^\circ$. Vì $OI \perp BC$ tại I nên $\widehat{SIO} = 90^\circ$.

Gọi M là trung điểm của SO , suy ra $SM = MO = \frac{SO}{2}$ (1)

Xét $\triangle SAO$ vuông tại A có M là trung điểm của SO

$\Rightarrow AM$ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền $SO \Rightarrow AM = \frac{1}{2}SO$ (2)

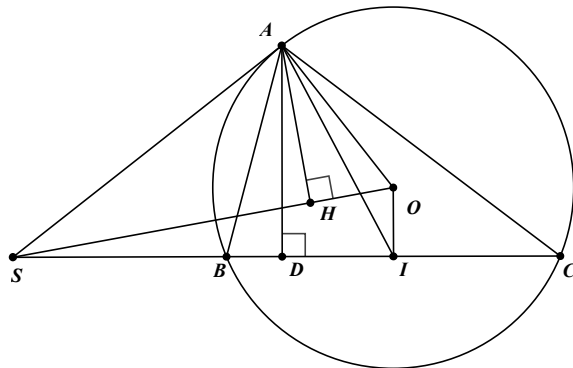
Xét $\triangle SIO$ vuông tại I có M là trung điểm SO

$\Rightarrow IM$ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền $SO \Rightarrow IM = \frac{1}{2}SO$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có: $AM = IM = SM = MO = \frac{SO}{2}$

Suy ra bốn điểm S, A, O, I cùng thuộc một đường tròn hay tứ giác $SAOI$ nội tiếp đường tròn đường kính SO .

b) Gọi H và D lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm A đến các đường thẳng SO và SC . Chứng minh $\widehat{OAH} = \widehat{IAD}$.



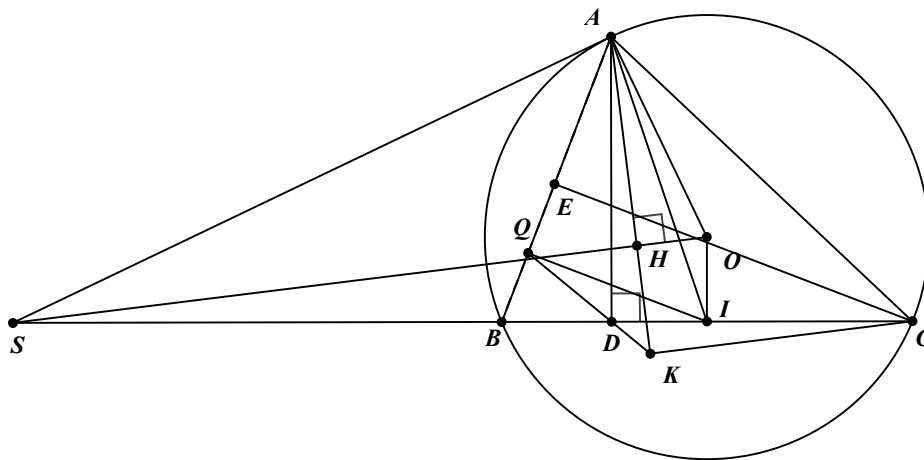
Theo ý a), ta có: Tứ giác $SAOI$ nội tiếp nên $\widehat{SOA} = \widehat{SIA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn \widehat{SA});

$$\Rightarrow 90^\circ - \widehat{SOA} = 90^\circ - \widehat{SIA};$$

Mà $90^\circ - \widehat{SOA} = \widehat{OAH}$ ($\triangle AHO$ vuông tại H); $90^\circ - \widehat{SIA} = \widehat{IAD}$ ($\triangle ADI$ vuông tại D)

$$\Rightarrow \widehat{OAH} = \widehat{IAD}.$$

c) Vẽ đường cao CE của tam giác ABC . Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng BE . Đường thẳng QD cắt đường thẳng AH tại điểm K . Chứng minh $BQ \cdot BA = BD \cdot BI$.



Xét $\triangle BOC$ cân tại O có: $OI \perp BC$

$\Rightarrow OI$ là đường cao

$\Rightarrow OI$ cũng là đường trung tuyến

$\Rightarrow I$ là trung điểm của BC .

Mà Q là trung điểm của BE

$\Rightarrow IQ$ là đường trung bình của $\triangle BEC$

$\Rightarrow IQ \parallel CE$ mà $CE \perp AB$

$\Rightarrow IQ \perp AB$, lại có $\widehat{IDA} = 90^\circ (AD \perp SC)$

Chứng minh tự câu a) tứ giác $AQDI$ nội tiếp đường tròn đường kính AI

$\Rightarrow \widehat{QAI} + \widehat{QDI} = 180^\circ$ mà $\widehat{BDQ} + \widehat{QDI} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{BDQ} = \widehat{QAI} (= 180^\circ - \widehat{QDI})$.

Xét $\triangle BDQ$ và $\triangle BAI$ có:

\hat{B} chung; $\widehat{BDQ} = \widehat{BAI}$ (chứng minh trên);

$\Rightarrow \triangle BDQ \sim \triangle BAI$ (g - g)

$\Rightarrow \frac{BD}{BQ} = \frac{BA}{BI} \Rightarrow BQ \cdot BA = BD \cdot BI$ (**đpcm**).

Bài V. (0,5 điểm)

Một doanh nghiệp tư nhân chuyên kinh doanh các loại xe gắn máy. Hiện nay, doanh nghiệp đang tập trung chiến lược kinh doanh xe máy điện với chi phí nhập về là 23 triệu đồng và bán ra với giá 27 triệu đồng mỗi chiếc. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng, theo tỉ lệ cứ giảm 100 nghìn đồng mỗi chiếc xe máy điện thì số lượng xe bán ra trong mỗi năm sẽ tăng thêm 20 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải bán với giá mới là bao nhiêu để lợi nhuận thu được sẽ cao nhất?

Hướng dẫn

Gọi số lần giảm giá là x ($0 \leq x \leq 40$) (mỗi lần giảm 0,1 triệu/xe và bán được thêm 20 xe).

Khi đó giá bán ra là $27 - 0,1x$ (triệu/xe)

Số xe bán ra trong một năm là $600 + 20x$ (chiếc xe/năm)

Lợi nhuận thu được trong 1 năm là $T = (20x + 600)(27 - 0,1x) - 23 \cdot (600 + 20x)$ (triệu)

$$T = 20(x + 30)(4 - 0,1x) = 2(x + 30)(40 - x)$$

$$T = 2(-x^2 + 10x + 1200) = 2[-(x - 5)^2 + 1225] = -2(x - 5)^2 + 2450$$

Vì $(x - 5)^2 \geq 0$ với mọi x thỏa mãn điều kiện nên $-2(x - 5)^2 \leq 0 \Rightarrow T \leq 2450$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = 5$.

Vậy lợi nhuận lớn nhất là 2450 triệu/năm khi giá bán ra mỗi xe là 26,5 triệu/xe.

CHÚC CÁC EM HỌC TẬP TỐT!