BUỔI LIVE 18_ HM10 LUYỆN ĐỀ

ĐỀ TỰ LUYỆN

Thời gian: 120 phút.

Bài I. ***(1,5 điểm)***

1) Kết quả đo tốc độ của 25 xe ô tô (đơn vị: km/h) khi đi qua một trạm quan sát đã được thống kê dưới bảng sau:

46	55	57	50	45
41	44	46	40	58
50	56	52	59	44
52	40	42	47	54
45	48	58	49	40

a) Hãy ghép các số liệu thành bốn nhóm tương ứng với bốn nửa khoảng có độ dài bằng nhau và lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm.

b) Vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột mô tả bảng số liệu ở ý a.

Hướng dẫn

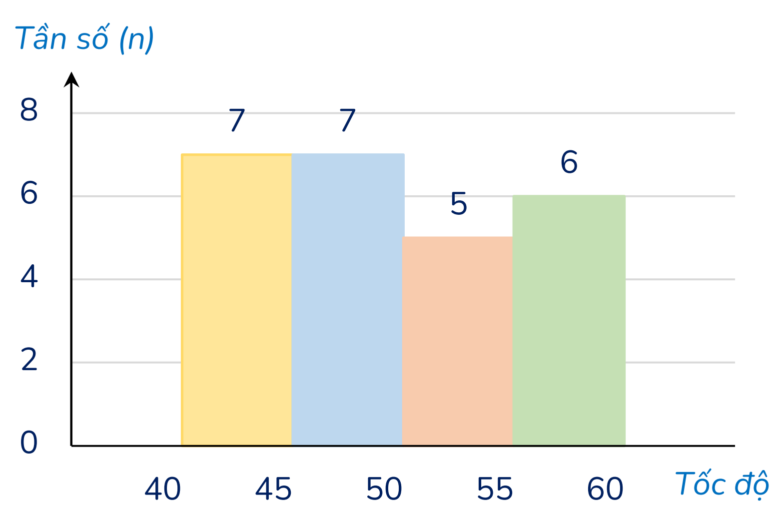
a) Các số liệu thành bốn nhóm tương ứng với bốn nửa khoảng là: $[40;45)$; $[45;50)$; $[50;55)$, $[55;60)$.

Bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm.

Tốc độ (km/h)	$[40;45)$	$[45;50)$	$[50;55)$	$[55;60)$	Tổng
Tần số (n)	7	7	5	6	$N=25$

b)

Biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột



2) Có hai túi I và II. Túi I chứa ba tấm thẻ cùng loại, đánh số $4;5;6$. Túi II chứa hai tấm thẻ cùng loại, đánh số $7;8$. Từ mỗi túi I và II, rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Tính xác suất của biến cố C: "Tổng hai số ghi trên hai tấm thẻ là một số nguyên tố".

Hướng dẫn

Các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên 2 tấm thẻ được rút ra.

$\Omega = \{(4;7);(4;8);(5;7);(5;8);(6;7);(6;8)\}$

Nên $n(\Omega) = 6$

Vì các tấm thẻ ở mỗi túi là cùng loại nên các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó là đồng khả năng.

Các kết quả thuận lợi của biến cố C là: $C = \{(4;7);(5;8);(6;7)\}$.

Số kết quả thuận lợi là $n(C) = 3$.

Xác suất của biến cố C là: $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Bài II. (*1,5 điểm*)

Cho hai biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+2} - \dfrac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

a) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = 25$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Xét biểu thức $P = A.B$. So sánh P với $\sqrt{P}$.

Hướng dẫn

a) Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A, ta có

$$A = \frac{\sqrt{25}+3}{\sqrt{25}+1} = \frac{5+3}{5+1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Vậy $A = \dfrac{4}{3}$ khi $x = 25$

b) Rút gọn biểu thức B.

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2} \text{ với } x \geq 0; x \neq 1$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{3\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right) + 1.\left(\sqrt{x}-1\right) - 3\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$B=\frac{x+2\sqrt{x}+\sqrt{x}-1-3\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$B=\frac{x-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$B=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ với $x\ge 0;x\ne 1$

c) Xét biểu thức $P=A.B$. So sánh P với $\sqrt{P}$.

$$P=A.B=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}.\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$$

với $x\ge 0;x\ne 1$ suy ra $\sqrt{x}+3>\sqrt{x}+2>0$ suy ra $\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}>1$ suy ra $P>1$.

Vì $P>1$ nên $\sqrt{P}>1>0$ suy ra $\sqrt{P}-1>0$ nên $\sqrt{P}\left(\sqrt{P}-1\right)>0$ hay $P-\sqrt{P}>0$

Suy ra: $P>\sqrt{P}$.

Vậy $P>\sqrt{P}$.

Bài III. (2,5 điểm)

1) Một đội công nhân dự định mỗi ngày sửa 40 m đường. Nhưng do thời tiết không thuận lợi nên thực tế mỗi ngày họ sửa được ít hơn 10 m so với dự định. Vì vậy, họ phải kéo dài thời gian làm việc thêm 6 ngày. Tính chiều dài đoạn đường đội công nhân dự định sửa.

Hướng dẫn

Gọi chiều dài đoạn đường đội công nhân dự định sửa là x (m) $x>0$

Khi đó thời gian đội dự định sửa là $\dfrac{x}{40}$ (ngày)

Vì mỗi ngày thực tế họ sửa được $40-10=30$ (m) nên thời gian thực tế đội công nhân sửa xong đoạn đường là $\dfrac{x}{30}$ (ngày)

Vì thực tế họ phải kéo dài thời gian làm việc thêm 6 ngày nên ta có phương trình:

$$\frac{x}{30}-\frac{x}{40}=6$$

$$x\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{40}\right)=6$$

$$x\cdot\frac{1}{120}=6$$

$x=720$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy chiều dài đoạn đường đội công nhân dự định sửa là $720\ m$.

2) Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ địa điểm A và đi đến địa điểm B. Do vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy là $20km/h$ nên ô tô đến B sớm hơn xe máy 30 phút. Biết quãng đường AB dài $60km$, hỏi nếu cùng lúc ô tô đi từ A và xe máy đi từ B thì sau bao lâu hai xe gặp nhau? (Giả định rằng vận tốc mỗi xe là không đổi trên toàn bộ quãng đường AB).

Hướng dẫn

30 phút $=\frac{1}{2}$ giờ

Gọi vận tốc của ô tô là $x(km/h;x>20)$.

Vận tốc của xe máy là $x-20(km/h)$

Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB: $\frac{60}{x}$ (giờ), thời gian xe máy đi hết AB: $\frac{60}{x-20}$ (giờ)

Do ô tô đến sớm hơn 30 phút nên ta có phương trình:

$$\frac{60}{x-20}-\frac{60}{x}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{2.60x}{2.(x-20)x}-\frac{2.60(x-20)}{2.(x-20)x}=\frac{(x-20)x}{2.(x-20)x}$$

$$\Rightarrow 120x-120x+2400=x^2-20x$$

$$x^2-20x-2400=0.$$

Ta có $\Delta'=(-10)^2-1.(-2400)=2500>0;\sqrt{\Delta'}=50$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

$$x_1=\frac{-(-10)+50}{1}=60(tm);x_2=\frac{-(-10)-50}{1}=-40(ktm).$$

Vậy vận tốc của ô tô là $60km/h$, vận tốc của xe máy là $60-20=40km/h$.

Vậy, thời gian để hai xe chuyển động ngược chiều gặp nhau là: $60:(60+40)=0,6$ (giờ) $=36$ phút.

3) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: y=2mx-m^2+1$ và Parabol $P: y=x^2$. Tìm m để đường thẳng d cắt Parabol P tại hai điểm có hoành độ x_1,x_2 thỏa mãn $2y_1+4mx_2-2m^2-3<0$

Hướng dẫn

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P), ta có: $x^2=2mx-m^2+1$

$$x^2-2mx+m^2-1=0\quad (a=1;b=-2m;c=m^2-1)$$

$$\Delta=4m^2-4m^2+4=4>0$$

Vì $\Delta>0$ nên (d) và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Khi đó, áp dụng định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$

Vì giao điểm có toạ độ $(x_1;y_1)$ nằm trên đường thẳng d nên ta có: $y_1 = 2mx_1 - m^2 + 1$

Ta có:

$2y_1 + 4mx_2 - 2m^2 - 3 < 0$

$\Rightarrow 2\left(2mx_1 - m^2 + 1\right) + 4mx_2 - 2m^2 - 3 < 0$

$4mx_1 - 2m^2 + 2 + 4mx_2 - 2m^2 - 3 < 0$

$4m\left(x_1 + x_2\right) - 4m^2 - 1 < 0$

$8m^2 - 4m^2 - 1 < 0$

$4m^2 - 1 < 0$

$4m^2 < 1$

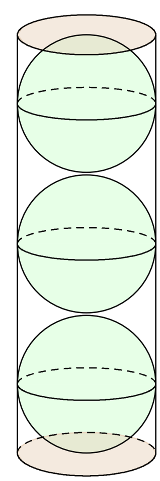
$m^2 < \frac{1}{4}$

$-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$

Vậy $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài IV. *(4 điểm)*

1) Một hộp đựng bóng tennis có dạng hình trụ, đựng vừa khít 3 quả bóng tennis xếp theo chiều dọc. Các quả bóng tennis có dạng hình cầu đường kính $6,4\,cm$.



a) Tính thể tích của hộp đựng bóng.

b) Tính thể tích bên trong hộp đựng bóng không bị chiếm bởi ba quả bóng tennis.

Hướng dẫn

Hộp đựng bóng tennis là một hình trụ có bán kính đáy bằng $\frac{6,4}{2} = 3,2\,cm$, chiều cao bằng $6,4.3 = 19,2\,cm$

a) Thể tích của hộp đựng bóng tennis là: $\pi.3,2^2.19,2 = 196,608\pi\left(cm^3\right)$.

b) Thể tích của 3 quả tennis trong hộp là: $3\cdot\frac{4}{3}\pi.3,2^3 = 131,072\pi\left(cm^3\right)$.

Thể tích bên trong hộp đựng bóng không bị chiếm bởi ba quả bóng tennis là: $196,608\pi - 131,072\pi = 65,536\pi\left(cm^3\right)$.

Vậy thể tích bên trong hộp đựng bóng không bị chiếm bởi ba quả bóng tennis là $65,536\pi\left(cm^3\right)$.

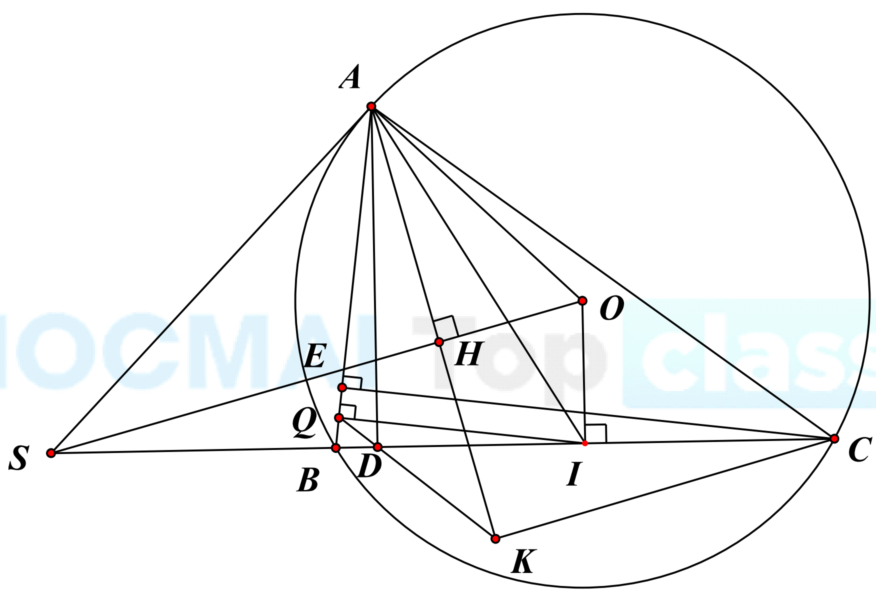
2) Cho ΔABC có ba góc nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại điểm S. Gọi I là chân đường vuông góc kẻ từ điểm O đến đường thẳng BC.

a) Chứng minh tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi H và D lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm A đến đường thẳng SO và SC. Chứng minh $\widehat{OAH} = \widehat{IAD}$.

c) Vẽ đường cao CE của ΔABC. Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng BE. Đường thẳng QD cắt đường thẳng AH tại điểm K. Chứng minh $BQ.BA = BD.BI$ và $\widehat{KDC} = \widehat{KAC}$.

Hướng dẫn



a) Chứng minh tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp.

Vì SA là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $SA \perp OA \Rightarrow \widehat{SAO} = 90^\circ \Rightarrow S,A,O$ thuộc đường tròn đường kính SO (1)

Có I là chân đường vuông góc hạ từ O xuống BC nên $OI \perp SC \Rightarrow \widehat{SIO} = 90^\circ \Rightarrow S,O,I$ thuộc đường tròn đường kính SO (2)

Từ (1) và (2) suy ra bốn điểm S,A,I,O cùng thuộc đường tròn đường kính SO.

Suy ra tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi H và D lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm A đến đường thẳng SO và SC. Chứng minh $\widehat{OAH} = \widehat{IAD}$.

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $SAOI$ có $\widehat{SOA}=\widehat{SIA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung SA). Suy ra : $\widehat{SOA}=\widehat{DIA}$.

Xét ΔHOA vuông tại H có $\widehat{OAH}+\widehat{SOA}=90^\circ$

Xét ΔIAD vuông tại D có $\widehat{IAD}+\widehat{SIA}=90^\circ$

Suy ra : $\widehat{OAH}=\widehat{IAD}$

c) Vẽ đường cao CE của ΔABC. Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng BE. Đường thẳng QD cắt đường thẳng AH tại điểm K. Chứng minh $BQ.BA=BD.BI$ và $\widehat{KDC}=\widehat{KAC}$.

+/ Chứng minh $BQ.BA=BD.BI$.

Xét ΔOBC có $OB=OC$ nên ΔOBC cân tại O.

Lại có, $OI\perp BC\Rightarrow OI$ vừa là đường cao, vừa là trung tuyến của ΔOBC.

Suy ra : I là trung điểm BC.

Suy ra IQ là đường trung bình của ΔBEC nên $IQ\,//\,CE$.

Mà $CE\perp AB\Rightarrow IQ\perp AB\Rightarrow\widehat{IQA}=90^\circ\Rightarrow I,Q,A$ thuộc đường tròn đường kính IA.

Lại có $AD\perp BC\Rightarrow\widehat{ADI}=90^\circ\Rightarrow A,D,I$ thuộc đường tròn đường kính IA.
Suy ra bốn điểm A,Q,I,D cùng thuộc một đường tròn nên tứ giác $AQDI$ nội tiếp được.

$\Rightarrow\widehat{AQD}+\widehat{AID}=180^\circ$ (tổng 2 góc đối)

Mà $\widehat{AQD}+\widehat{BQD}=180^\circ\Rightarrow\widehat{BQD}=\widehat{AID}$ hay

Xét ΔBQD và ΔBIA có :

$$\left.\begin{matrix}\widehat{BQD}=\widehat{AIB}\\ \text{Chung } \widehat{IBA}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\Delta BQD\backsim\Delta BIA\,(g.g)\Rightarrow\frac{BQ}{BI}=\frac{BD}{BA}\Rightarrow BQ.BA=BD.BI$$

+/ Chứng minh $\widehat{KDC}=\widehat{KAC}$.

Vì $AQDI$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{QAI}+\widehat{QDI}=180^\circ$ (tổng hai góc đối).

Lại có $\widehat{QDB}+\widehat{QDI}=180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow\widehat{QDB}=\widehat{QAI}$ hay $\widehat{QDB}=\widehat{BAI}$

Mà $\widehat{KDC}=\widehat{QDB}$ (hai góc đối đỉnh)

Suy ra $\widehat{KDC}=\widehat{BAI}$. (3)

Xét ΔBAD vuông tại đỉnh D có $\widehat{BAD}=90^\circ-\widehat{ABC}$. (4)

Xét ΔOAC có $OA=OC(=R)$. Suy ra ΔOAC cân tại đỉnh O.

Suy ra $\widehat{OAC}=90^\circ-\frac{1}{2}\widehat{AOC}$. (5)

Trong đường tròn (O), ta có $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$ (6) (tính chất góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC)

Từ (4),(5) và (6) suy ra : $\widehat{BAD} = \widehat{OAC}$.

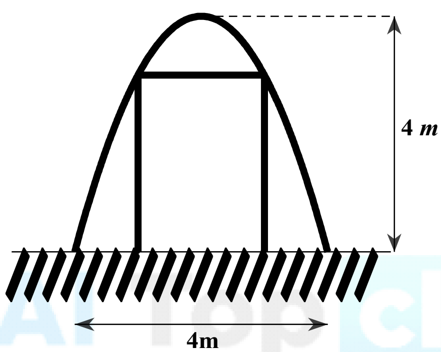
Theo chứng minh ở câu b, có $\widehat{IAD} = \widehat{OAH}$.

Suy ra : $\widehat{BAD} + \widehat{IAD} = \widehat{OAC} + \widehat{OAH} \Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{HAC}$ hay $\widehat{BAI} = \widehat{KAC}$. (7)

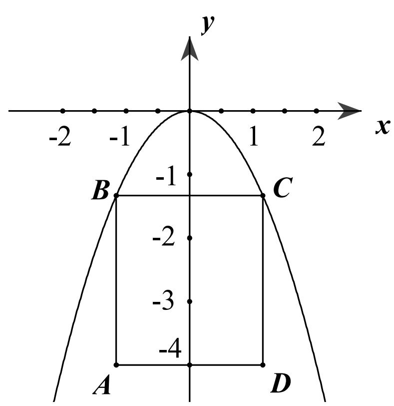
Từ (3) và (7) suy ra $\widehat{KDC} = \widehat{KAC}$.

Bài V. (*0,5 điểm*)

Cửa hầm lò khai thác than có dạng một Parabol, khoảng cách từ điểm cao nhất của cửa đến mặt đất là 4 mét, khoảng cách giữa hai chân cửa là 4 mét. Người ta muốn gia cố cho cửa lò bằng một khung thép hình chữ nhật sao cho hai đỉnh dưới của khung thép nằm trên mặt đất, hai đỉnh trên của khung thép chống vào mái hầm *(hình vẽ minh họa)*. Tìm kích thước của khung thép sao cho diện tích của hình chữ nhật tạo bởi khung thép lớn nhất.



Hướng dẫn



Đặt hệ tọa độ như hình vẽ, coi khung sắt là hình chữ nhật $ABCD$. Khi đó (P) đi qua các điểm $O(0;0)$; $(-2;-4)$; $(2;-4)$ nên parabol (P) có phương trình: $y = -x^2$.

Giả sử $C \in (P) \Rightarrow C(x;-x^2)$ $(0 < x < 2)$. Khi đó $BC = 2x$; $CD = 4 - x^2$ suy ra $S = 2x(4 - x^2)$

Với m, n, p không âm ta có:

$m + n + p \geq 0$, $(m-n)^2 + (n-p)^2 + (p-n)^2 \geq 0$

$\Rightarrow (m+n+p)\left[(m-n)^2+(n-p)^2+(p-m)^2\right]\geq 0$

$\Rightarrow (m+n+p)\left(m^2-2mn+n^2+n^2-2np+p^2+p^2-2mp+p^2\right)\geq 0$

$\Rightarrow (m+n+p)\left(2m^2+2n^2+2p^2-2mn-2np-2mp\right)\geq 0$

$\Rightarrow (m+n+p)\left(m^2+n^2+p^2-mn-np-mp\right)\geq 0$

$\Rightarrow m^3+mn^2+mp^2-m^2n-mnp-m^2p+m^2n+n^3+np^2-mn^2-n^2p-mnp$
$+m^2p+n^2p+p^3-mnp-np^2-mp^2\geq 0$

$\Rightarrow m^3+n^3+p^3\geq 3mnp$

Đặt $m=\sqrt[3]{a};n=\sqrt[3]{b};p=\sqrt[3]{c}$ $\Rightarrow a,b,c\geq 0$ và $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$.

$\Rightarrow abc\leq\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$ $(*)$

Dấu "$=$" xảy ra khi $a=b=c$

Ta có: $S^2=4x^2\left(4-x^2\right)^2=16x^2\cdot\dfrac{4-x^2}{2}.\dfrac{4-x^2}{2}\leq 16\left(\dfrac{x^2+\dfrac{4-x^2}{2}+\dfrac{4-x^2}{2}}{3}\right)^3=\dfrac{1024}{27}$ (áp dụng bất đẳng thức $(*)$)

Suy ra $S^2\leq\dfrac{1024}{27}$ hay $S\leq\dfrac{32\sqrt{3}}{9}$. Dấu "$=$" xảy ra khi $x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy kích thước của khung thép có chiều rộng là $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}(\text{m})$; chiều dài là $\dfrac{8}{3}(\text{m})$.

CHÚC CÁC EM HỌC TẬP TỐT!