BUỔI LIVE 20_ HM10 LUYỆN ĐỀ

ĐỀ TỰ LUYỆN

Thời gian: 120 phút.

Bài I. (*1,5 điểm*)

1) Số học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường được ghi trong bảng sau:

Người được bình chọn	Huy	Minh	An	Tú
Tần số	150	125	50	175

a) Lập bảng tần số tương đối cho mẫu số liệu trên.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn dữ liệu.

Hướng dẫn

Tổng số học sinh tham gia bình chọn là: $150+125+50+175=500$ (học sinh)

Tần số tương đối số người bình chọn cho các cầu thủ lần lượt là:

Huy: $\frac{150}{500}\cdot 100\% = 30\%$

Minh: $\frac{125}{500}\cdot 100\% = 25\%$

An: $\frac{50}{500}\cdot 100\% = 50\%$

Tú: $\frac{175}{500}\cdot 100\% = 35\%$

Bảng tần số tương đối:

Người được bình chọn	Huy	Minh	An	Tú	Tổng
Tần số tương đối	30%	25%	10%	35%	100%

b) Số đo cung tương ứng các hình quạt biểu diễn tần số tương đối số người bình chọn cho các cầu thủ lần lượt là:

Huy: $360^\circ \cdot 30\% = 108^\circ$

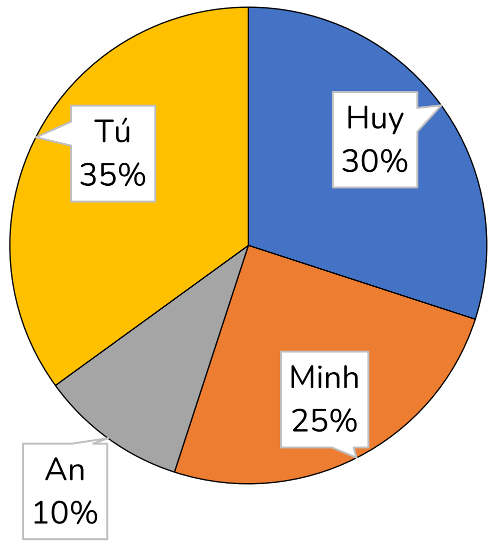
Minh: $360^\circ \cdot 25\% = 90^\circ$

An: $360^\circ \cdot 10\% = 36^\circ$

Tú: $360^\circ \cdot 35\% = 126^\circ$

Biểu đồ hình quạt tròn:

Biểu đồ tỉ lệ phần trăm số học sinh bình chọn danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất



2) Hai bạn nam Thăng, Long và hai bạn nữ Hà, Vi tham gia đợt biểu diễn nghệ thuật của lớp 9B. Giáo viên chọn ngẫu nhiên hai bạn để tham gia tiết mục hát chung. Tính xác suất của biến cố D: "Trong hai bạn được chọn ra, có một bạn nam và một bạn nữ".

Hướng dẫn

Kí các bạn Thăng, Long, Hà, Vi là: T, L, H, V.

Không gian mẫu của phép thử là: $\Omega = \{(T,L);(T,H);(T,V);(L,H);(L,V);(H,V)\}$

Nên $n(\Omega) = 6$

Vì chọn ngẫu nhiên hai bạn nên các kết quả là đồng khả năng.

Các kết quả thuận lợi cho biến cố D là $\{(T,H);(T,V);(L,H);(L,V)\}$.

Nên $n(D) = 4$

Vậy, xác suất của biến cố D là $P(D) = \dfrac{n(D)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Bài II. *(1,5 điểm)*

Cho biểu thức $A = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ với $x \ge 0; x \ne 1$

a) Tính giá trị của A khi $x = 9$;

b) Rút gọn $P = \dfrac{B}{A}$;

c) Tìm x nguyên để P nguyên.

Hướng dẫn

a) Thay $x=9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được

$$A=\frac{1}{\sqrt{9}+1}=\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}$$

Vậy với $x=9$ thì $A=\frac{1}{4}$.

b) $P=\left(\frac{3}{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right):\frac{1}{\sqrt{x}+1}$

$$P=\frac{3+\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{1}$$

$$P=\frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{1}$$

$$P=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$$

c) $P=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}-1+3}{\sqrt{x}-1}=1+\frac{3}{\sqrt{x}-1}$

Vì x là số nguyên, $x\geq 0$ nên $\sqrt{x}$ là số nguyên dương hoặc số vô tỉ.

Nếu $\sqrt{x}$ là số vô tỉ thì $\sqrt{x}-1$ là số vô tỉ, suy ra $\frac{3}{\sqrt{x}-1}$ là số vô tỉ (không thỏa mãn)

Nếu $\sqrt{x}$ là số nguyên thì $\sqrt{x}-1$ là số nguyên. Khi đó, để $\frac{3}{\sqrt{x}-1}$ nguyên thì $\sqrt{x}-1$ phải là ước của 3

Suy ra: $\sqrt{x}-1\in U\left(3\right)=\left\{\pm1;\pm3\right\}$

Ta có bảng sau:

$\sqrt{x}-1$	1	-1	3	-3
$\sqrt{x}$	2	0	4	-2 (L)
x	4 (TM)	0 (TM)	16 (TM)	

Vậy $x\in\left\{0;4;16\right\}$

Bài III. *(2,5 điểm)*

1) Sau một thời gian phát hành, nhà sản xuất đã ra quyết định giảm giá một dòng máy tính bảng để khuyến mãi. Đợt một giảm 5%, đợt hai giảm 4% so với giá sau khi giảm ở đợt một. Sau hai đợt giảm giá, chiếc máy tính bảng hiện được bán với giá 4560000 đồng. Hỏi giá một chiếc máy tính bảng ban đầu là bao nhiêu?

Hướng dẫn

Gọi giá một chiếc máy tính bảng ban đầu là x đồng. ĐK : $x > 0$

Đợt một giảm 5% nên giá bán là $(100\% - 5\%)x = 0{,}95x$ (đồng).

Đợt hai giảm 4% so với giá sau khi giảm ở đợt một nên giá bán là $0{,}95x.(100\% - 4\%) = 0{,}912x$ (đồng).

Vì sau hai đợt giảm giá, chiếc máy tính bảng hiện được bán với giá 4560000 đồng. Ta có phương trình :

$0{,}912x = 4560000$

$x = 4560000 : 0{,}912$

$x = 5000000$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy giá một chiếc máy tính bảng ban đầu là 5000000 đồng.

2) Hai người thợ quét sơn một ngôi nhà. Nếu họ cùng làm thì trong 6 ngày xong việc. Nếu người thợ thứ nhất làm một mình trong 5 ngày rồi nghỉ, người thứ hai làm tiếp 4 ngày thì cả hai làm được $\frac{7}{9}$ công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người thợ phải làm trong bao nhiêu ngày để xong việc.

Hướng dẫn

Gọi thời gian hoành thành công việc khi làm riêng của mỗi người thợ lần lượt là x (ngày), y (ngày). Điều kiện: $x;y > 6$

Một ngày mỗi người thợ hoàn thành được số phần công việc lần lượt là: $\frac{1}{x}$ (công việc) và $\frac{1}{y}$ (công việc).

Một ngày cả hai người cùng làm thì được số phần công việc là: $1 : 6 = \frac{1}{6}$ (công việc)

Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ (1)

Người thứ nhất làm một mình trong 5 ngày được số phần công việc là: $5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}$ (công việc)

Người thứ hai làm một mình trong 4 ngày được số phần công việc là: $4 \cdot \frac{1}{y} = \frac{4}{y}$ (công việc)

Do đó, họ hoàn thành được $\frac{7}{9}$ công việc. Ta có phương trình: $\frac{5}{x} + \frac{4}{y} = \frac{7}{9}$ (2)

Từ (1) và (2). Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{7}{9} \end{cases}$

Nhân từng vế của phương trình (1) với 5 ta được hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{5}{x}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{5}{6} \ (3) \\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{7}{9} \ \ (2) \end{cases}$

Trừ từng vế của phương trình (3) và (2) , ta được phương trình: $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{18}$ (4)

Giải phương trình (4): $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{18}$

$y=18$ (tm)

Thay $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{18}$ vào phương trình (1), ta được: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{18}=\dfrac{1}{6}$

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{18}=\dfrac{1}{9}$ (tm) nên $x=9$ (tm)

Vậy thời gian hoành thành công việc khi làm riêng của mỗi người thợ lần lượt là 9 ngày và 18 ngày.

3) Cho phương trình $x^2-5x+m=0$ (m là tham số)

a) Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Khi phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn: $x_1=4x_2$. Tính giá trị của biểu thức: $T=\dfrac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$.

Hướng dẫn

a) Ta có: $\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot m=25-4m$.

Để phương trình $x^2-5x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta>0$ hay $25-4m>0$.

Suy ra: $m<\dfrac{25}{4}$.

Vậy để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $m<\dfrac{25}{4}$.

b) Khi đó theo định lí Viète, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=5 & (1) \\ x_1x_2=m & (2) \end{cases}$

Theo bài ta có $x_1=4x_2$ suy ra $x_1-4x_2=0$ (3)

Từ (1) và (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Thay $x_1 = 4$ và $x_2 = 1$ vào (2), ta được $m = 4 \cdot 1 = 4$

Giá trị $m = 4$ thỏa mãn điều kiện $m < \frac{25}{4}$, nên tồn tại hai nghiệm x_1, x_2 như trên

Đồng thời, vì $x_1 = 4 > 0$ và $x_2 = 1 > 0$ nên các biểu thức chứa căn $\sqrt{x_1}$ và $\sqrt{x_2}$ đều xác định

Thay $x_1 = 4$ và $x_2 = 1$ vào biểu thức T, ta có:

$$T = \frac{|4-1|}{\sqrt{4} + \sqrt{1}} = \frac{|3|}{2+1} = \frac{3}{3} = 1.$$

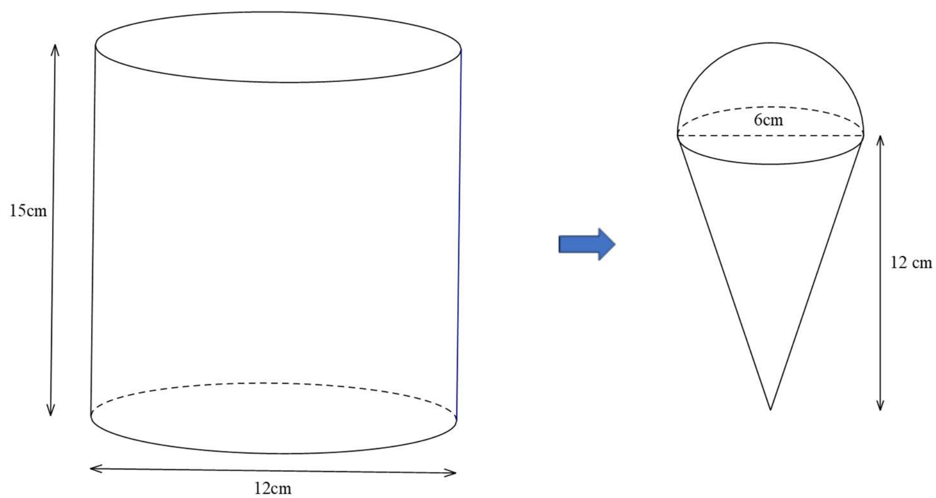
Vậy $T = 1$.

Bài IV. (*4 điểm*)

1) Một hộp kem hình trụ có đường kính 12cm và chiều cao 15cm đựng đầy kem được đặt trên mặt bàn phẳng.

a) Tính thể tích hộp kem.

b) Kem trong hộp sẽ được chia vào các bánh ốc quế hình nón có chiều cao 12cm và đường kính 6cm, phần kem nhô lên có hình bán cầu như hình vẽ. Hãy tìm số que kem có thể chia được.



Hướng dẫn

a) Bán kính đáy của hộp kem hình trụ là: $12 : 2 = 6(cm)$

Thể tích kem trong hộp hình trụ là: $\pi \cdot 6^2 \cdot 15 = 540\pi\ (\text{cm}^3)$.

b) Bán kính đáy của bánh ốc quế (cũng là bán kính của phần kem hình bán cầu) là: $6 : 2 = 3(cm)$

Thể tích phần kem nằm trong bánh ốc quế (hình nón) là: $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 3^2\cdot 12 = 36\pi$ (cm^3)

Thể tích phần kem nhô lên (hình bán cầu) là: $V_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot 3^3 = 18\pi$ (cm^3)

Thể tích của một que kem là: $V = V_1 + V_2 = 36\pi + 18\pi = 54\pi$ (cm^3)

Số que kem có thể chia được là: $\frac{540\pi}{54\pi} = 10$ (que).

Vậy có thể chia được 10 que kem

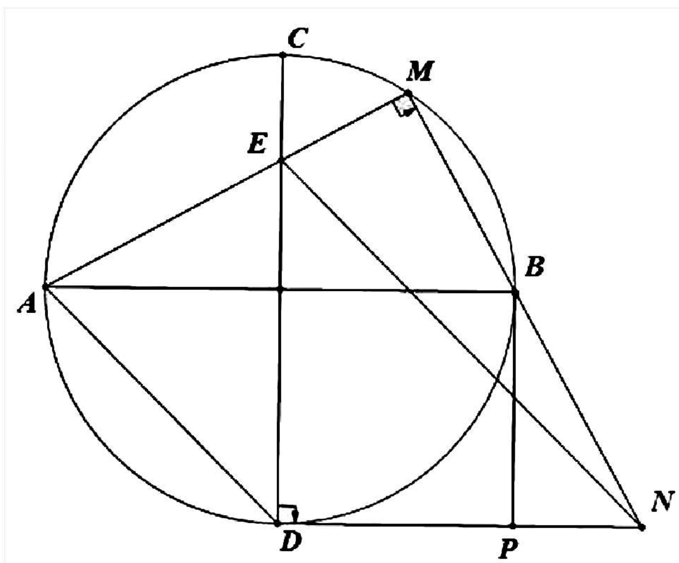
2) Cho (O) đường kính AB. Kẻ đường kính CD vuông góc với AB. Lấy M thuộc cung nhỏ BC, AM cắt CD tại E. Qua D kẻ tiếp tuyến với (O) cắt đường thẳng BM tại N. Gọi P là hình chiếu vuông góc của B lên DN

a) Chứng minh các điểm M,N,D,E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $EN // CB$.

c) Chứng minh $AM\cdot BN = 2R^2$ và tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để diện tích tam giác BNC đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn



a) Chứng minh các điểm M,N,D,E cùng thuộc một đường tròn.

Xét đường tròn (O), ta có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $AM \perp BM \Rightarrow \widehat{EMN} = 90^\circ$.

Vì DN là tiếp tuyến của (O) tại D nên $OD \perp DN$.

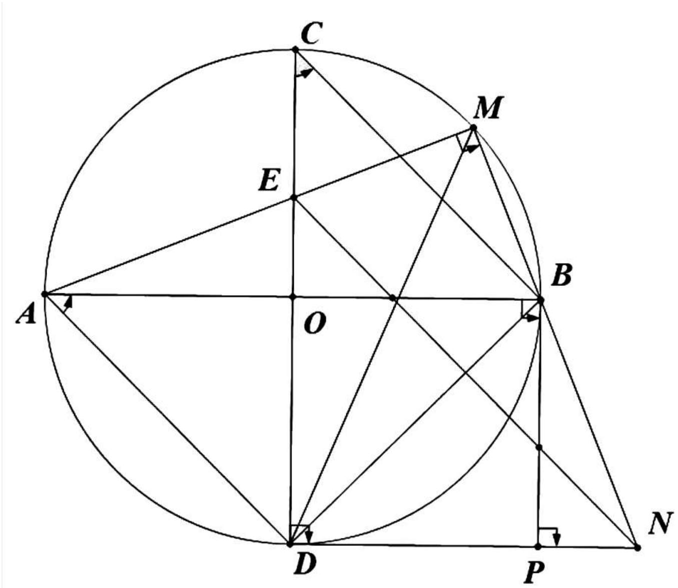
Mặt khác, CD là đường kính nên E,O,D thẳng hàng. Suy ra $ED \perp DN \Rightarrow \widehat{EDN} = 90^\circ$.

Xét ΔEMN vuông tại M (do $\widehat{EMN} = 90^\circ$), suy ra điểm M thuộc đường tròn đường kính EN (1)

Xét ΔEDN vuông tại D (do $\widehat{EDN} = 90^\circ$), suy ra điểm D thuộc đường tròn đường kính EN (2)

Từ (1) và (2) suy ra E,M,N,D thuộc đường tròn tâm là trung điểm của EN bán kính là $\frac{EN}{2}$.

b) Chứng minh $EN//CB$.



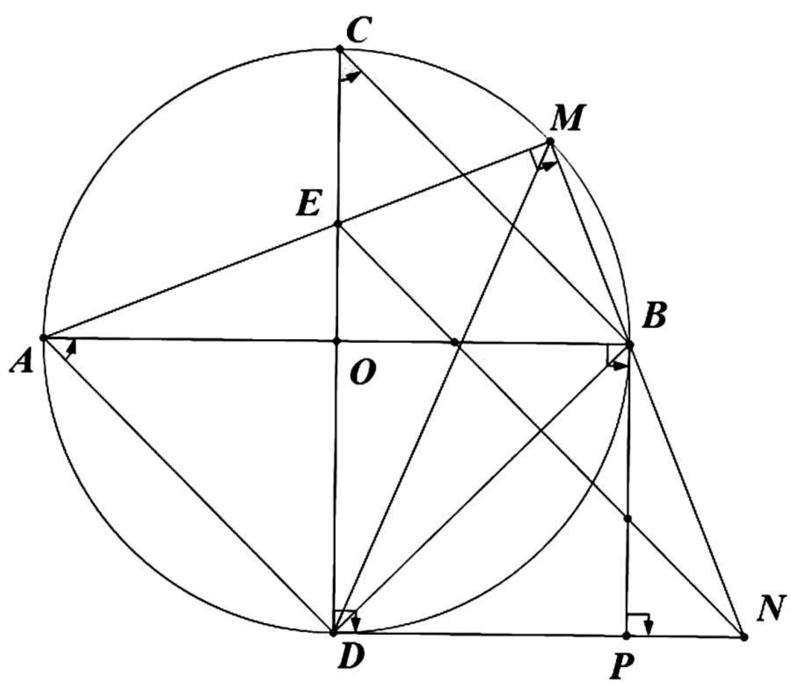
$EMND$ là tứ giác nội tiếp suy ra $\widehat{EDM}=\widehat{ENM}$ (2 góc nột tiếp cùng chắn cung EM)

Hay $\widehat{CDM}=\widehat{ENM}$

Mà $\widehat{CDM}=\widehat{CBM}$ (2 góc nột tiếp cùng chắn cung CM của (O))

Suy ra $\widehat{CDM}=\widehat{ENM}$ mà 2 góc này đồng vị suy ra $EN//CB$.

c) Chứng minh $AM \cdot BN = 2R^2$ và tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để diện tích tam giác BNC đạt giá trị lớn nhất.



Xét ΔAOB có $CD \perp AB$ tại trung điểm O nên CD là đường trung trực của đoạn AB. Vì $E \in CD$ nên $EA = EB$.

Xét ΔAMB vuông tại M và tam giác ΔAOE vuông tại O có:

$\widehat{MAB}$ là góc chung.

$\widehat{O} = \widehat{AMB} = 90^\circ$

Suy ra $\Delta AMB \backsim \Delta AOE(g.g) \Rightarrow \dfrac{AM}{AO} = \dfrac{AB}{AE}$ suy ra $\dfrac{AM}{R} = \dfrac{2R}{AE} \Rightarrow AM.AE = 2R^2$.

Mà $EA = EB$ (cmt) nên $AM \cdot EB = 2R^2 \quad (3)$

Tứ giác $OBPD$ có $\widehat{B} = \widehat{D} = \widehat{P} = 90^\circ$ suy ra $OBPD$ là hình chữ nhật mà $OB = OD$ nên $OBPD$ là hình vuông nên DB là phân giác $\widehat{ODP}$ $\widehat{EDB} = \widehat{NDB} = 45^\circ$

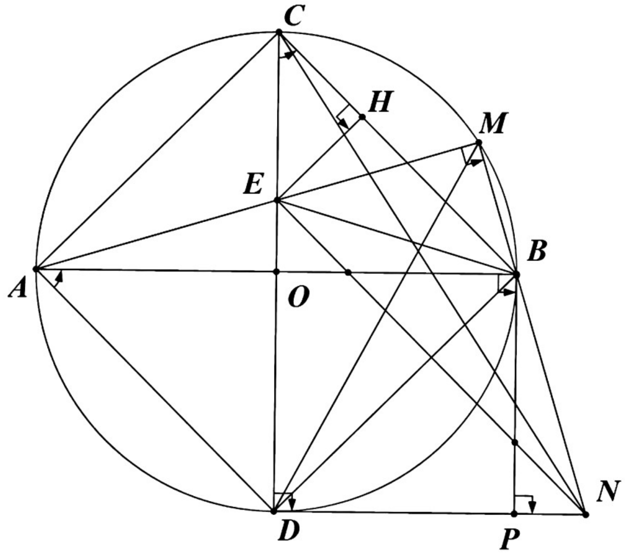
Ta có: ΔEDN vuông tại D.

Vì $EN // BC$ suy ra $\widehat{DEN} = \widehat{DCB} = 45^\circ$ (hai góc đồng vị) nên ΔDEN vuông cân mà DB phân giác nên DB đồng thời là trung trực $\Rightarrow BE = BN$ (tính chất điểm thuộc trung trực đoạn thẳng) .

Thay $EB = BN$ vào (3) ta được $AM.BN = 2R^2$.

*) Gọi khoảng cách từ N đến BC là h_N

$S_{BCN} = \dfrac{1}{2} BC.h_N$ mà $EN // BC$ nên khoảng cách từ N đến BC bằng khoảng cách từ E đến BC



Kẻ EH vuông góc với BC tại H, ta có $h_N = EH \Rightarrow S_{BCN} = \frac{1}{2}BC \cdot EH$.

Xét ΔCHE vuông tại H có $\widehat{ECH} = \widehat{OCB} = 45^\circ$ (do ΔOBC vuông cân tại O).

Suy ra $HC = HE = CE \cdot \sin 45^\circ = \frac{CE}{\sqrt{2}}$.

Suy ra: $S_{BCN} = \frac{1}{2}BC.CH = \frac{1}{2}BC \cdot \frac{CE}{\sqrt{2}}$.

Vì $BC = R\sqrt{2}$ không đổi, nên S_{BCN} đạt giá trị lớn nhất khi CE đạt giá trị lớn nhất.
Khi M di chuyển trên (O) thì E di chuyển trên OC.

Nên CE càng lớn hay E càng gần với (O). Khi đó M tiến dần đến B.

Tuy nhiên, nếu $M \equiv B$ thì không dựng được điểm N theo đề bài.

Vậy không tồn tại vị trí của M trên cung nhỏ BC để diện tích tam giác BCN đạt giá trị lớn nhất.

Bài V. *(0,5 điểm)*

Cho hai số thực x, y dương thỏa mãn $x \geq 2y$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Hướng dẫn

Ta có $x \geq 2y$ nên $\frac{x}{y} \geq 2$.

Xét biểu thức $A = \frac{xy}{x^2 + y^2}$:

$$\frac{1}{A} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

$\frac{1}{A}=\frac{x^2}{xy}+\frac{y^2}{xy}$

$\frac{1}{A}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

$\frac{1}{A}=\left(\frac{x}{4y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{3}{4}\cdot\frac{x}{y}$

Với hai số $a;b\geq 0$ ta có $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0$ hay $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ $(*)$

Dấu "$=$" xảy ra khi $a=b$.

Vì x, y dương nên áp dụng bất đẳng thức $(*)$ với hai số $\frac{x}{4y};\frac{y}{x}$, ta có:

$\frac{x}{4y}+\frac{y}{x}\geq 2\sqrt{\frac{x}{4y}.\frac{y}{x}}$

$\frac{x}{4y}+\frac{y}{x}\geq 2\sqrt{\frac{1}{4}}$

$\frac{x}{4y}+\frac{y}{x}\geq 1$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=2y$) **(1)**

Vì $\frac{x}{y}\geq 2$ nên $\frac{3}{4}\cdot\frac{x}{y}\geq 2\cdot\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}\cdot\frac{x}{y}\geq\frac{3}{2}$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=2y$) **(2)**

Từ **(1)**, **(2)**, ta có: $\left(\frac{x}{4y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{3}{4}\cdot\frac{x}{y}\geq\frac{5}{2}$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=2y$).

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{1}{A}$ bằng $\frac{5}{2}$ khi và chỉ khi $x=2y$.

Mà biểu thức $\frac{1}{A}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi A đạt giá trị lớn nhất.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A bằng $\frac{2}{5}$ khi và chỉ khi $x=2y$.

CHÚC CÁC EM HỌC TẬP TỐT!